

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LONG AN

Đề thi gồm: 01 trang.

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
NĂM HỌC 2024-2025

Môn: Toán – Lớp 9 THCS

Thời gian làm bài: 150 phút.

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{x\sqrt{x} + 8} \cdot \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4} \right)$ với điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Sau khi rút gọn biểu thức A , hãy so sánh A và $\sqrt{A}$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y(y^2 + 2y - 4x) = 0$.

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} + \sqrt{(x+2)(5-x)} = 4$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2+y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 49. \end{cases}$$

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Ba đường cao AD , BE và CF của tam giác ABC đồng quy tại H (các điểm D , E và F lần lượt thuộc các cạnh BC , AC và AB). Các đường thẳng AD , BE và CF lần lượt cắt đường tròn (O) tại K , M và N (các điểm K , M và N lần lượt không trùng với các điểm A , B và C).

a) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

b) MK cắt AC tại P , NK cắt AB tại Q . Chứng minh ba điểm Q , H , P thẳng hàng.

c) Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng r và $BC = a$.

Chứng minh $\frac{a}{r} \geq 2(\sqrt{2} + 1)$.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho a , b , c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT.

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x\sqrt{x}+8} \cdot \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4} \right)$ với điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Sau khi rút gọn biểu thức A , hãy so sánh A và $\sqrt{A}$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y(y^2 + 2y - 4x) = 0$.

Lời giải

1. a) Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x\sqrt{x}+8} \cdot \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)} \cdot \left[\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} - \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \right] \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+4} \cdot \left(\sqrt{x}+2 - \frac{x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+4} \cdot \frac{x+4\sqrt{x}+4-x-2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{x-2\sqrt{x}+4} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4} \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, xét

$$A-1 = \frac{2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+4} - 1 = \frac{-x+4\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}+4} = \frac{-(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-1)^2+3} < 0 \text{ (vì } x \neq 4).$$

Do đó $A-1 < 0$ hay $A < 1$.

$$\text{Mà } A = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)^2+3} \geq 0 \text{ nên } 0 \leq A < 1.$$

Vậy $A \leq \sqrt{A}$, với mọi $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

2. Ta có

$$\begin{aligned}
x^2 + y(y^2 + 2y - 4x) &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 + y^3 + 2y^2 - 4xy &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 &= 2y^2 - y^3 \\
\Leftrightarrow (x - 2y)^2 &= y^2(2 - y) \\
\Leftrightarrow \left(\frac{x - 2y}{y}\right)^2 &= 2 - y.
\end{aligned}$$

$$\text{Vì } \left(\frac{x - 2y}{y}\right)^2 \geq 0 \text{ nên } 2 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 2.$$

Vì y nguyên dương nên $y \in \{1; 2\}$.

$$\text{Khi } y = 1 \text{ thì } x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn } x \text{ nguyên dương).}$$

$$\text{Khi } y = 2 \text{ thì } x^2 + 2 \cdot (8 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn } x \text{ nguyên dương).}$$

Vậy có 3 cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$(x; y) \in \{(1; 1); (3; 1); (4; 2)\}.$$

Câu 2. (5,0 điểm)

$$\text{a) Giải phương trình: } \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} + \sqrt{(x+2)(5-x)} = 4.$$

$$\text{b) Giải hệ phương trình: } \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right) = 49. \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a) ĐKXD: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5.$$

Đặt $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}$ ($t > 0$). Khi đó

$$t^2 = 7 + 2\sqrt{(x+2)(5-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{t^2 - 7}{2}.$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$t + \frac{t^2 - 7}{2} = 4 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (nhân)} \\ t = -5 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Với $t = 3$, suy ra

$$\sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{3^2 - 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2 + 3x + 10} = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x + 10 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \text{ (nhân)} \\ x = \frac{3-3\sqrt{5}}{2} \text{ (nhân)}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \frac{3+3\sqrt{5}}{2}; \frac{3-3\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

b) ĐKXD: $xy \neq 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{x}=5 \\ x^2+\frac{1}{y^2}+y^2+\frac{1}{x^2}=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)=5 \\ \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)=49. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x + \frac{1}{x} \\ b = y + \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \\ b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 \\ y^2 + \frac{1}{y^2} = b^2 - 2. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó hệ phương trình trở thành: } \begin{cases} a+b=5 & (1) \\ a^2-2+b^2-2=49 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $b = 5 - a$. Thế vào (2), ta được

$$\begin{aligned} a^2 - 4 + (5 - a)^2 &= 49 \Leftrightarrow a^2 - 4 + 25 - 10a + a^2 - 49 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a^2 - 10a - 28 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ a = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{+) Với } a = 7 \Rightarrow b = 2, \text{ ta được hệ phương trình } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 7 \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra trường hợp này ta có 2 bộ nghiệm } (x; y) \in \left\{ \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; 1 \right); \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}; 1 \right) \right\}.$$

+) Với $a = -2 \Rightarrow b = 7$, ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -2 \\ y + \frac{1}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y^2 - 7y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Suy ra trường hợp này ta có 2 bộ nghiệm $(x; y) \in \left\{ \left(-1; \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \right); \left(-1; \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right) \right\}.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là

$$\left\{ \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}; 1 \right); \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}; 1 \right); \left(-1; \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \right); \left(-1; \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right) \right\}.$$

Câu 3. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Ba đường cao AD , BE và CF của tam giác ABC đồng quy tại H (các điểm D , E và F lần lượt thuộc các cạnh BC , AC và AB). Các đường thẳng AD , BE và CF lần lượt cắt đường tròn (O) tại K , M và N (các điểm K , M và N lần lượt không trùng với các điểm A , B và C).

a) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

b) MK cắt AC tại P , NK cắt AB tại Q . Chứng minh ba điểm Q , H , P thẳng hàng.

c) Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{CM}{CF} + \frac{AN}{AD} + \frac{BK}{BE}.$

Lời giải

a) Xét tứ giác $CDHE$ có

- $HDC = 90^\circ$ (AD là đường cao của ΔABC);

- $HEC = 90^\circ$ (BE là đường cao của ΔABC);

$$\Rightarrow HDC + HEC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác $CHDE$ nội tiếp.

Suy ra $HDE = HCE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn HE) hay

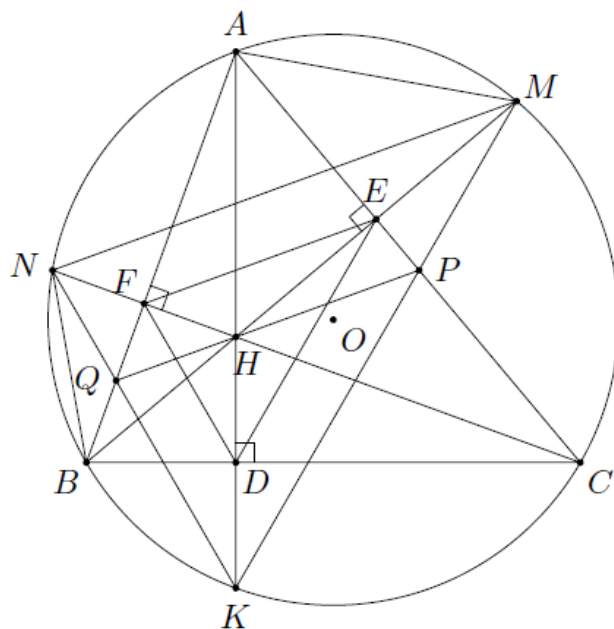
$$HDE = ACF. \quad (1)$$

Xét tứ giác $ACDF$ có

- $ADC = 90^\circ$ (AD là đường cao của ΔABC);

- $AFC = 90^\circ$ (CF là đường cao của ΔABC);

$$\Rightarrow ADC = AFC = 90^\circ.$$



Suy ra tứ giác $ACDF$ nội tiếp.

Suy ra $ADF = FCA$ (2 góc nội tiếp cùng chắn DF). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HDE = FDA (= FCA)$.

Suy ra DH là tia phân giác của FDE .

Chúng minh hoàn toàn tương tự, ta cũng có

- Tứ giác $CDHE$ nội tiếp $\Rightarrow HED = HCD$ hay $HED = FCB$.
- Tứ giác $BCEF$ có $BFC = BEC = 90^\circ$ nên $BCEF$ nội tiếp, suy ra $FEB = FCB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn FB).

Suy ra $HED = FEB (= FCB)$, suy ra EH là tia phân giác của FED .

Xét $\triangle EDF$ có

- EH là tia phân giác của FED (chứng minh trên).
- EH là tia phân giác của FED (chứng minh trên).

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EDF .

b) Vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $FBE = FCE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn FE) hay $FBH = NCA$.

Mà $NCA = NBA$ (2 góc nội tiếp cùng chắn NA) nên $FBH = NBA$, suy ra BF là tia phân giác của NBH .

Xét $\triangle BHN$ có

- BF là đường phân giác (chứng minh trên).
- BF là đường cao ($AB \perp CF$).

Suy ra $\triangle BHN$ cân tại B , suy ra BF là đường trung trực của NH .

Suy ra $\triangle BQN = \triangle BQH$ (c.c.c).

Suy ra $BHQ = BNQ$ hay $BHQ = BNK$. (3)

Chúng minh hoàn toàn tương tự, ta cũng có AC là đường trung trực của HM .

Suy ra $\triangle PHE$ cân tại P , suy ra $PHM = PMH$ hay $BHM = BMK$.

Mà $BMK = BNK$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BK) nên $PHM = BNK$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $PHM = BHQ (= BNK)$.

Vậy 3 điểm Q, H, P thẳng hàng.

c) Ta có H và N đối xứng với nhau qua AB nên $AN = AH$;

Đồng thời H và M đối xứng với nhau qua AC nên $CM = CH$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được H và K đối xứng với nhau qua BC nên $BK = BH$.

Khi đó

$$S = \frac{CH}{CF} + \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} = \frac{CF - HF}{CF} + \frac{AD - HD}{AD} + \frac{BE - HE}{BE} = 3 - \left(\frac{HF}{CF} + \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} \right)$$

Mà

$$\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HF \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot CF \cdot AB} = \frac{HF}{CF};$$

$$\frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HD \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC} = \frac{HD}{AD};$$

$$\frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HE \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot BE \cdot AC} = \frac{HE}{BE}.$$

$$\text{Do đó } T = 3 - \left(\frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ABC}} \right) = 3 - 1 = 2.$$

Vậy $T = 2$.

Câu 4. (3,0 điểm)

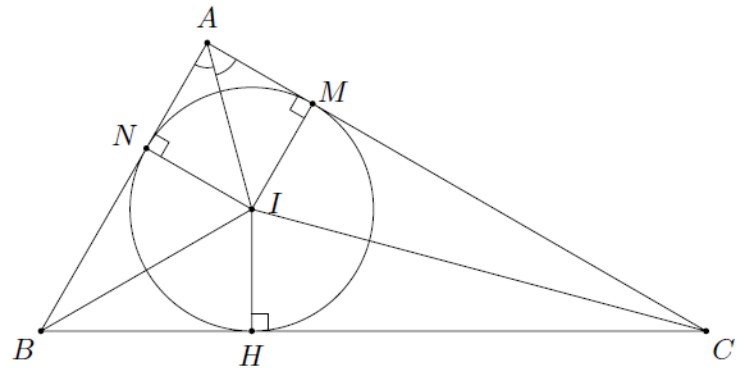
Cho tam giác ABC vuông tại A . Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng r và $BC = a$.

Chứng minh $\frac{a}{r} \geq 2(\sqrt{2} + 1)$.

Lời giải

Đặt $AB = c$, $AC = b$. Ta có

$$\begin{aligned} S_{\Delta BIC} + S_{\Delta IAC} + S_{\Delta IAB} &= S_{\Delta ABC} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}bc &= \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc \\ \Leftrightarrow bc &= r(a + b + c) \\ \Leftrightarrow r &= \frac{bc}{a + b + c}. \end{aligned}$$



Lại có $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pythagore).

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $b^2 + c^2 \geq 2bc$ và $b + c \geq 2\sqrt{bc}$.

Do đó $a^2 \geq 2bc$ hay $a \geq \sqrt{2bc}$.

Suy ra $a + b + c \geq \sqrt{2bc} + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow r = \frac{bc}{a+b+c} \leq \frac{bc}{(2+\sqrt{2})\sqrt{bc}}$ hay $\frac{1}{r} \geq \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{bc}}$.

Suy ra $\frac{a}{r} \geq \frac{\sqrt{2bc} \cdot (2+\sqrt{2})}{\sqrt{bc}}$ hay $\frac{a}{r} \geq 2 \cdot (\sqrt{2} + 1)$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $b = c$, tức là tam giác ABC vuông cân tại A .

Vậy $\frac{a}{r} \geq 2(\sqrt{2} + 1)$.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$.

Lời giải

Do $a + b + c = 1$ nên $ab + bc + ca = \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$.

Lại có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \\ &= a^3 + a^2b + a^2c + b^3 + b^2a + b^2c + c^3 + c^2a + c^2b \\ &= (a^3 + ab^2) + (b^3 + bc^2) + (c^3 + ca^2) + (a^2b + b^2c + c^2a). \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức CauChy ta có

$$\begin{aligned} a^3 + ab^2 &\geq 2a^2b; \\ b^3 + bc^2 &\geq 2b^2c; \\ c^3 + ca^2 &\geq 2c^2a; \\ a^2 + b^2 + c^2 &\geq 3(a^2b + b^2c + c^2a). \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{1}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Khi đó $P \geq 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3 - 3(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$. Điều kiện $t \geq \frac{1}{3}$.

Ta có $P \geq 14t + \frac{3-3t}{2t} = \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức CauChy ta có $\frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} \geq 2\sqrt{\frac{27t}{2} \cdot \frac{3}{2t}} = 9$.

Mặt khác $\frac{t}{2} - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}$.

Suy ra $P \geq 9 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{23}{3}$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.