

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TỈNH PHÚ YÊN
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG, NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn thi: TOÁN (chuyên)

Ngày thi: 02/6/2024

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1:

- a) Biết $x = \sqrt{2} + 1$, tính $A = \sqrt{\sqrt{2}(x+1)(x^2+1)(x^4+1) + x - \sqrt{2}}$
- b) Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}$
- c) Cho biết $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Tính $x + y$

Câu 2: Cho tam giác ABC ($AB < AC < BC$) ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi G và H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống CI và BI. Chứng minh rằng

- a) Tứ giác BGED là hình thang
- b) Tứ giác BGFD nội tiếp
- c) Các điểm E, F, G, H thẳng hàng

Câu 3:

- a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} |x - y| = 4 \\ |x^2 - y^2| + |x + y| = 10 \end{cases}$$

b) Không giải phương trình, tìm M^2 với M là tổng các giá trị tuyệt đối của tất cả các nghiệm của phương trình: $x = \sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{x}}}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC cân tại A, có đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AH; E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên BM, AC. Đường thẳng CE cắt các đường thẳng HF và BF lần lượt tại G và K. Chứng minh rằng

- a) $\angle BEC = \angle HEA$
- b) AG vuông góc với BF.

Câu 5: Cho $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq \frac{1}{4}$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{1 + 2\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{1 + 2x} + \frac{1}{1 + 2y}$

Câu 6: Hãy xác định n số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tổng của n số đó bằng 2024.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Từ $x = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2}$

Áp dụng kết quả này ta có:

$$A = \sqrt{\sqrt{2}(x+1)(x^2+1)(x^4+1) + x - \sqrt{2}}$$

$$A = \sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) + 1}$$

$$A = \sqrt{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) + 1}$$

$$A = \sqrt{(x^4-1)(x^4+1) + 1}$$

$$A = \sqrt{x^8 - 1 + 1}$$

$$A = \sqrt{x^8} = x^4 = (\sqrt{2} + 1)^4$$

Lưu ý: Có thể thí sinh tính ra kết quả tương đương $A = 17 + 12\sqrt{2}$

b) Ta có:
$$B = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + (\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 2 + \sqrt{10})}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}$$
$$= 1 + \frac{\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{10}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}$$
$$= 1 + \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5})}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}$$
$$= 1 + \sqrt{2}$$

c) Do $(\sqrt{y^2+1}-y)(\sqrt{y^2+1}+y) = 1 \Rightarrow \sqrt{y^2+1}-y \neq 0$ ta có

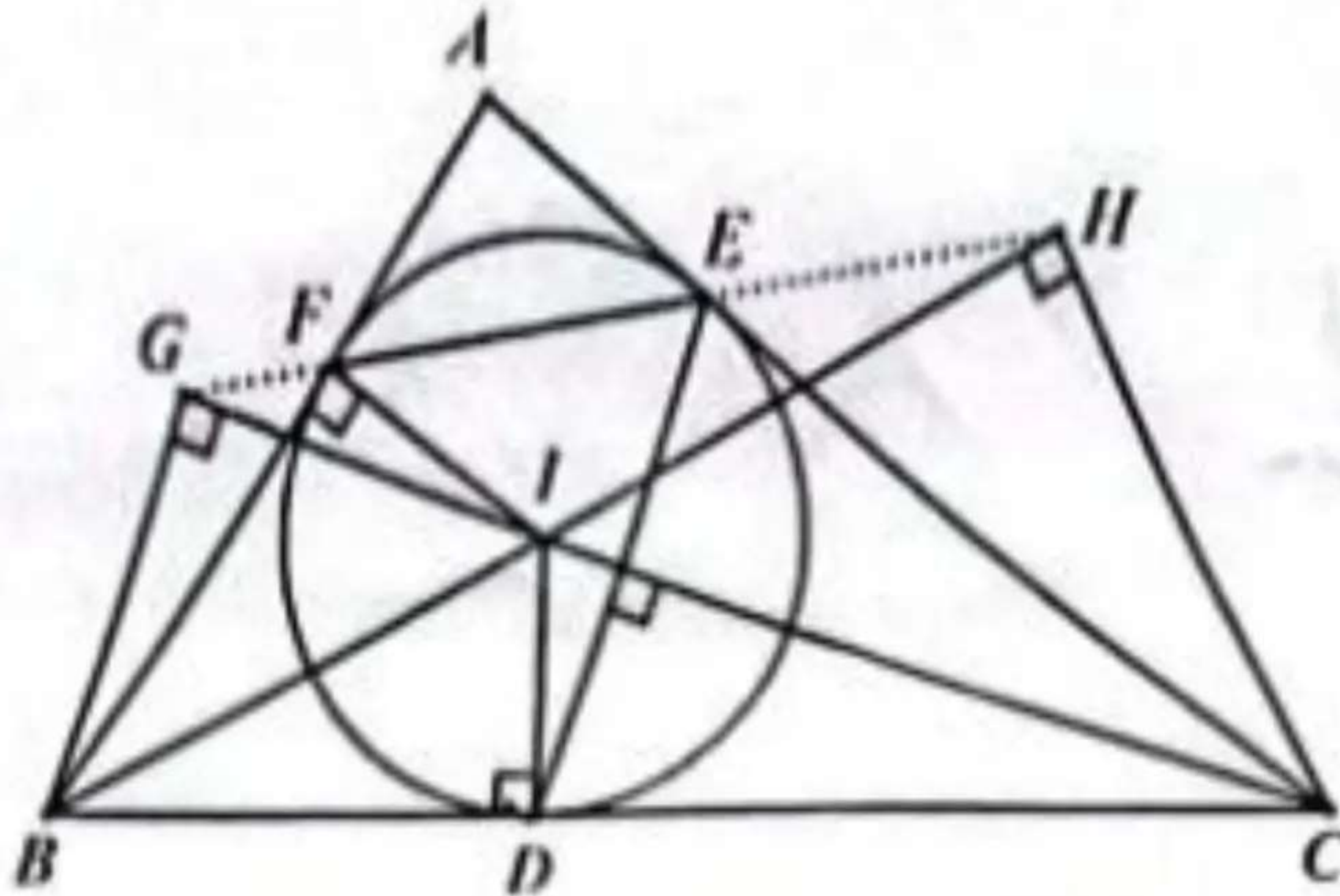
$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} \cdot \frac{y - \sqrt{y^2+1}}{y - \sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1} - y$$

$$\Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1} \quad (1)$$

Tương tự, $y + \sqrt{y^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x \Leftrightarrow x + y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} \quad (2)$

Cộng (1) và (2) về theo về ta được $x + y = 0$

Câu 2:



a) Ta có: $BG \perp IC(gt), IC \perp DE$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow BG \parallel DE$$

Do đó tứ giác BGED là hình thang.

b) Do $AB < AC < BC$ nên $ACB < ABC < BAC$

$$\text{Do } \frac{ACB}{2} + ABC < \frac{ABC + ACB + BAC}{2} = 90^\circ$$

Nên tia BF nằm giữa hai tia BE và BG.

Tương tự ta cũng chứng minh được tia CE nằm giữa hai tia CF và CH

Ta có: $BGI = BDI = 90^\circ$

$$\Rightarrow BGID \text{ nội tiếp đường tròn đường kính BI} \quad (1)$$

Ta có: $BFI = 90^\circ$

$$\Rightarrow F \text{ nằm trên đường tròn đường kính BI} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra B, G, F, I, D cùng nằm trên đường tròn đường kính BI

Hay BGFD là tứ giác nội tiếp

c) BGFD là tứ giác nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow GFD + GBD = 180^\circ \quad (3)$$

$$\text{Lại có } EFD = EDC \text{ vì cùng chắn cung ED của đường tròn (I)} \quad (4)$$

$$\text{Hơn nữa, do } BG \parallel ED \text{ (cmt) nên } GBD = EDC \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4) và (5) } \Rightarrow GFD + EFD = 180^\circ$$

Hay G, F, E thẳng hàng

Tương tự H, E, F thẳng hàng

Suy ra đpcm.

Câu 3:

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} |x - y| = 4 \\ |x^2 - y^2| + |x + y| = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - y| = 4 \\ |x - y||x + y| + |x + y| = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-y|=4 \\ 5|x+y|=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-y|=4 \\ |x+y|=2 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x-y=4 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình (x; y) là (3;-1);(1;-3);(-1;3);(-3;1)

b) Điều kiện: $x \neq 0$

$$\text{Ta có: } \frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{\sqrt{3} + \frac{7}{x}}} = \frac{7\left(\sqrt{3} + \frac{7}{x}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + \frac{7}{x}\right) + 7} = \frac{7\sqrt{3}x + 49}{10x + 7\sqrt{3}}$$

$$\text{Do đó } x = \sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}x + 49}{10x + 7\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{3}x - 7 = 0 \quad (1)$$

(1) là phương trình bậc hai, có $\Delta = 31 > 0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

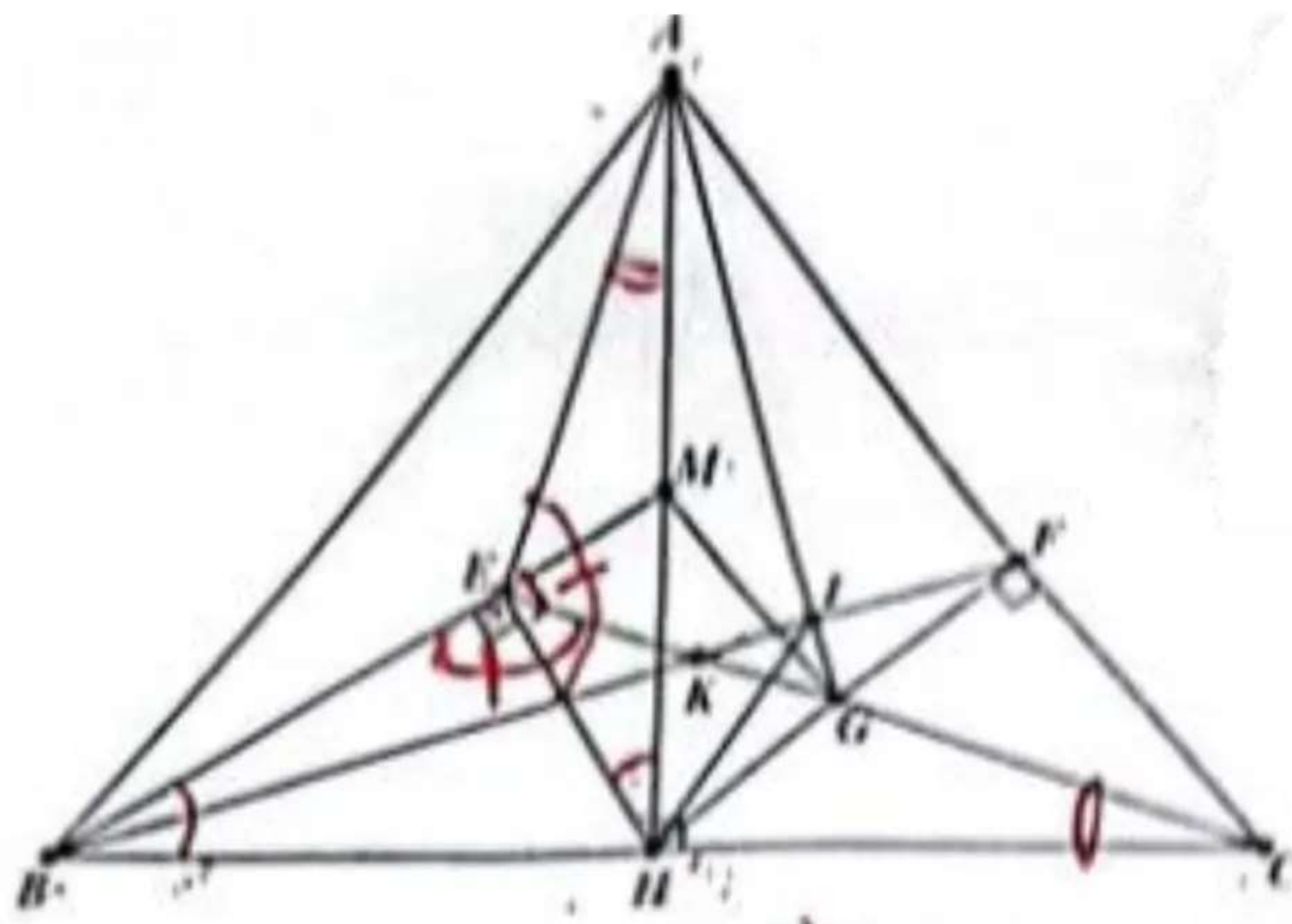
$$\text{Áp dụng định lý Viet ta được: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{3} \\ x_1 x_2 = -7 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } M^2 = (|x_1| + |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1||x_2| = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|$$

$$= (\sqrt{3})^2 - 2(-7) + 2|-7| = 31$$

Vậy $M^2 = 31$ là kết quả cần tìm.

Câu 4:



a) Do $HE \perp BM, AH \perp BC(gt) \Rightarrow HBE = MHE$ (1)

Suy ra hai tam giác vuông HBE và MHE đồng dạng

$$\text{Suy ra } \frac{BH}{BE} = \frac{HM}{HE} \quad (2)$$

Do M, H lần lượt là trung điểm của AH, BC nên $BC = 2BH$ và $HA = 2HM$ (3)

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \frac{BC}{BE} = \frac{HA}{HE} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \triangle EBC \sim \triangle EHA (c - g - c)$

Do vậy $\angle BEC = \angle HEA$

b) Do $\triangle EBC \sim \triangle EHA$ (cmt) nên $\angle HCE = \angle BCE = \angle HAE$
 $\Rightarrow$ Tứ giác AEHC nội tiếp

Do tứ giác AEHC nội tiếp nên $\angle HEA + \angle HCA = 180^\circ$ (5)

Do M, E, B thẳng hàng nên $\angle MEG + \angle BEC = 180^\circ$ (6)

Do $\triangle EBC \sim \triangle EHA$ nên $\angle BEC = \angle HEA$ (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra $\angle HCA = \angle MEG$ (8)

Lại có $\angle HCA = \angle MHG$ vì cùng phụ $\angle HAC$ (9)

Từ (8) và (9) suy ra $\angle MEG = \angle MHG$

$\Rightarrow$ Tứ giác MEHG nội tiếp

$\Rightarrow \angle HGM = \angle MEH = 90^\circ$

$\Rightarrow MG \perp HF$

$\Rightarrow MG \parallel AF$

Mà M là trung điểm của HA nên G là trung điểm của HE.

Ta có: $\angle AHF = \angle ACH$ vì cùng phụ $\angle CHF$

$\Rightarrow \triangle HFA \sim \triangle CFH$

$$\Rightarrow \frac{HA}{HF} = \frac{CH}{CF}$$

Do H, G lần lượt là trung điểm của BC, HF nên $BC = 2CH$ và $HF = 2HG$

Khi đó $\frac{HA}{2HG} = \frac{BC}{2CF} \Leftrightarrow \frac{HA}{HG} = \frac{BC}{CF}$

Kết hợp với (9) dẫn đến $\Delta BCF \sim \Delta AHG$

$\Rightarrow HBI = CBF = HAG = HAI$ (với I là giao điểm của AG và BF)

Từ đó suy ra ABHI nội tiếp, vì thế $\angle AIK = \angle AIB = \angle AHB = 90^\circ$ (đpcm)

Câu 5:

Cách 1:

Ta có:
$$\begin{aligned} \frac{2}{1+2\sqrt{xy}} - \left(\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} \right) &= \left(\frac{1}{1+2\sqrt{xy}} - \frac{1}{1+2x} \right) + \left(\frac{1}{1+2\sqrt{xy}} - \frac{1}{1+2y} \right) \\ &= \frac{2x-2\sqrt{xy}}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)} + \frac{2y-2\sqrt{xy}}{(1+2\sqrt{xy})(1+2y)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)} + \frac{2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2y)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1+2y) + 2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1+2x)}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y} + 2\sqrt{x.y} - 2\sqrt{y.x})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})((\sqrt{x}-\sqrt{y}) - 2\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y}))}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(1-2\sqrt{xy})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)} \end{aligned}$$

Vì $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq \frac{1}{4}$ nên $\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(1-2\sqrt{xy})}{(1+2\sqrt{xy})(1+2x)(1+2y)} \geq 0$ (1) đpcm

Dấu “=” xảy ra trong (1) khi và chỉ khi $x=y \geq 0$ hoặc x, y không âm và $xy = \frac{1}{4}$

Cách 2:

Đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}$ ($a, b \geq 0; ab \leq \frac{1}{2}$). Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+2ab} &\geq \frac{1}{1+2a^2} + \frac{1}{1+2b^2} \quad (1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1+2ab} - \frac{1}{1+2a^2} &\geq \frac{1}{1+2ab} - \frac{1}{1+2b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2-ab}{1+2a^2} &\geq \frac{ab-b^2}{1+2b^2} \quad (\text{do } 1+2ab > 0) \\ \Leftrightarrow a(a-b)(1+2b^2) &\geq b(a-b)(1+2a^2) \quad (\text{do } 1+2a^2 > 0; 1+2b^2 > 0) \\ \Leftrightarrow (a-b)(a+2ab^2-b-2a^2b) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)((a-b)-2ab(a-b)) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(1-2ab) \geq 0 \quad (2)$$

Do $(a-b)^2 \geq 0$ và $1-2ab \geq 0$ nên (2) đúng $\Leftrightarrow$ (1) đúng

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=y \geq 0$ hoặc x, y không âm và $xy = \frac{1}{4}$

Câu 6:

Ta có: $S = 1+2+3+\dots+n$

Và $S = n+(n-1)+\dots+1$

$$\text{Cộng } 2S = (n+1)n \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Giả sử n số nguyên dương liên tiếp thỏa mãn yêu cầu đề bài bắt đầu từ số nguyên dương $k+1$.

Ta có: $(k+1)+(k+2)+\dots+(k+n-1)+(k+n) = 2024$

$$\Leftrightarrow nk + \frac{n(n+1)}{2} = 2024$$

$$\Leftrightarrow 2nk + n(n+1) = 4048$$

$$\Leftrightarrow n(2k+n+1) = 2^4 \cdot 253$$

Do $n, n+1$ có tính chẵn lẻ khác nhau nên n và $2k+n+1$ có tính chẵn lẻ khác nhau.

i) Nếu n lẻ thì $2k+n+1$ chẵn.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} n=253 \\ 2k+n+1=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=253 \\ k=-119 \end{cases} (l)$$

ii) Nếu n chẵn thì $2k+n+1$ lẻ

$$\text{Khi đó } \begin{cases} n=16 \\ 2k+n+1=253 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=16 \\ k=118 \end{cases} (n)$$

Chú ý: Học sinh có thể không xét 2 trường hợp như trên mà có thể làm như sau:

$$\text{Do } n < 2k+n+1 \text{ nên } \begin{cases} n=16 \\ 2k+n+1=253 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=16 \\ k=118 \end{cases}$$

Vậy các số cần tìm là 16 số liên tiếp: 119, 120, ..., 134.