

(Đề thi có 05 câu, gồm 01 trang)

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: **19/12/2021**.

Câu 1. (4,0 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3\sqrt{2}x + 9} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}x + 16} = 5$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 5 &= \sqrt{x^2 - 3\sqrt{2}x + 9} + \sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}x + 16} \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \underbrace{\sqrt{\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{2}} - x\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2}}_{\text{Mincopski}} \geq \sqrt{\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} - x\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra tại

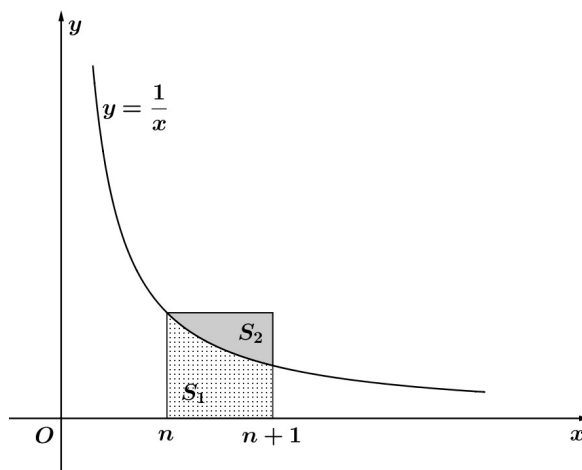
$$\frac{x - \frac{3}{\sqrt{2}}}{-x + \frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 3\left(\frac{4}{\sqrt{2}} - x\right) \Leftrightarrow 7x = \frac{24}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ta luôn có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$$

Lời giải



Đầu tiên ta có hàm số $y = \frac{1}{x}$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Do đó với mọi $n > 0$ thì $S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right) dx > \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln(n)$

Suy ra $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n+1)$

Suy ra ta có điều phải chứng minh

b) Gọi $x_n \in (0; 1); (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ là nghiệm nếu có của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n} = 0$$

Chứng minh rằng x_n luôn tồn tại với mọi số n ; xét tính hội tụ và tính giới hạn của dãy $\{x_n\}$ nếu có

Lời giải

Đầu tiên, ta nhận thấy hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n}$ luôn liên tục và nghịch biến

trên $(0; 1)$, do $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \dots - \frac{1}{(x-n)^2} < 0, \forall x \in (0; 1)$

Giả sử x_n là nghiệm của $f_n(x)$ trên $(0; 1)$. Do $x_n \in (0; 1); (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ nên ta có:

$$\frac{1}{x_n} = -\frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{2-x_n} - \dots - \frac{1}{n-x_n} > -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} > -\ln(n+1)$$

Suy ra $0 < x_n < \frac{1}{\ln(n+1)}$. Mặt khác ta lại có: $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(n+1)} \right) = 0$ nên theo nguyên

lí kẹp suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = 0$

Câu 3. (4,0 điểm)

Có 10 đồng tiền đặt liên tiếp thành một hàng ngang, mỗi đồng tiền có một mặt sấp và một mặt ngửa, lúc đầu tất cả đều hiển thị ngửa. Trong mỗi nước đi, người ta lật hai đồng tiền liền kề với điều kiện cả hai mặt đều ngửa hoặc cả hai đều sấp. Hỏi sau một số nước đi ta có thể thu được bao nhiêu hiển thị khác nhau của 10 đồng tiền?

Lời giải

Kí hiệu 0,1 lần lượt cho đồng xu ngửa và úp.

Bộ ban đầu là $(0, 0, \dots, 0)$ và ta sẽ tìm số trạng thái của bộ này.

Ta nhận thấy quá trình là "tương đương" tức là ta có thể đảo ngược quá trình để đưa về bộ $(0; 0)$. Ta có các nhận xét sau đây: (dễ dàng chứng minh)

+ Tồn tại 1 cặp $(0; 0)$ hoặc $(1; 1)$ trong bộ

+ Tính chẵn lẻ của số số 0 cũng như 1 là chẵn trong tất cả các bộ

+ Ta có thuật toán sau: $(1, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1); (1, 0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0);$

Đề ý ta có thể dịch chuyển bộ $(0; 0)$ (Tương tự với $(1; 1)$).

Do đó ta có thể phát triển lên thành dịch chuyển bộ $(0, 0, \dots, 0)$ nào đó.

Xét 1 dãy bất kì, ta sẽ dịch chuyển tất cả các bộ như trên về đầu dãy. Dãy sẽ có dạng $(0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, 1, \dots, 1, 0)$

Ta đổi các $(1, 1) \rightarrow (0, 0)$ và thực hiện tiếp quá trình trên

ta thu được $(0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ với A số 0 đứng đầu thì ta gọi A là kích cỡ của bộ. Ta thấy 1 bộ thì tương ứng có duy nhất 1 kích cỡ

+Tính chẵn lẻ của số số 0 giữa 2 số 1 liên tiếp là bất biến qua thuật toán

. Gọi $i_1, i_2, \dots, i_{t+1}$ là vị trí các số 1 và $j_1, j_2, \dots, j_t$ là số số 0 nằm giữa các số 1 (nếu số 0 nằm cuối cùng hoặc nằm ở đầu thì ta có thể coi có 1 số 1 nằm ở sau (trước số 0) đó .

Gọi $j_m = 2q_m + r_m$ ($r \geq 0, m \leq 1$) thì $A = 10 - (r_1 + r_2 + \dots + r_m) \Rightarrow A = 10$ khi ở các khoảng phân ra bởi số 1 sẽ có chẵn số 0 hay vị trí các số 1 là chẵn lẻ đan xen và bắt đầu bởi lẻ và kết thúc bởi chẵn .

Suy ra số số lẻ bằng với số số chẵn. Tới đây ta chuyển về bài toán tìm số dãy mà các số hạng chẵn lẻ đan xen theo thứ tự tăng dần.

Số số vị trí lẻ là $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, số số vị trí chẵn là $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

Áp dụng bổ đề quen thuộc suy ra số cách của mỗi cụm nêu trên là $(C_9^5)^2$ cách

Như vậy số cách cần tìm là $(C_9^5)^2$

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho các số thực dương $a; b; c$. Chứng minh rằng:

$$4(a+b+c) \geq 3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc})$$

Lời giải

Ta có:

$$8(a+b+c) = 3\left(\frac{a}{2} + 2b\right) + 2\left(\frac{a}{4} + b + 4c\right) + 6a \geq 6\sqrt{ab} + 6\sqrt[3]{abc} + 6a$$

$$\Rightarrow 8(a+b+c) \geq 6(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}) \Leftrightarrow 4(a+b+c) \geq 3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc})$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp trong đường tròn. Gọi B_1 là điểm đối xứng B qua AC ;

D_1 là điểm đối xứng D qua CE ; F_1 là điểm đối xứng F qua EA . Biết rằng

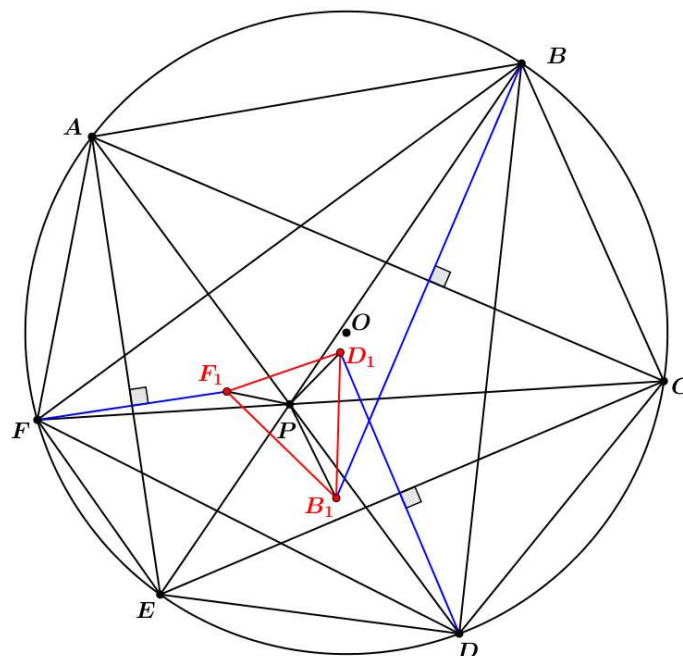
$$AB.CD.EF = BC.DE.FA$$

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại P

b) Chứng minh rằng hai tam giác $B_1D_1F_1$ và BDF đồng dạng

Lời giải

Đầu tiên ta có hình vẽ như sau:



a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại P

Gọi $F_1 = CP \cap (O)$. Theo bổ đề cát tuyến ta có: $\frac{PA}{PD} = \frac{BA \cdot BD}{EA \cdot ED}; \frac{PB}{PE} = \frac{AB \cdot AE}{DE \cdot DB};$

$$\text{Suy ra: } \frac{PA}{PD} \cdot \frac{PB}{PE} = \frac{AB \cdot AE}{DE \cdot DB} \cdot \frac{BA \cdot BD}{EA \cdot ED} = \left(\frac{AB}{DE} \right)^2;$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \frac{PC}{PF_1} \cdot \frac{PD_1}{PA} = \left(\frac{CD}{AF_1} \right)^2; \frac{PF_1}{PC} \cdot \frac{PE}{PB} = \left(\frac{EF_1}{BC} \right)^2$$

$$\text{Nhân ba đẳng thức lại ta có: } \left(\frac{AB}{DE} \cdot \frac{CD}{AF_1} \cdot \frac{EF_1}{BC} \right)^2 = \frac{PA}{PD} \cdot \frac{PB}{PE} \cdot \frac{PC}{PF_1} \cdot \frac{PD_1}{PA} \cdot \frac{PF_1}{PC} \cdot \frac{PE}{PB} = 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{DE} \cdot \frac{CD}{AF_1} \cdot \frac{EF_1}{BC} = 1 \Leftrightarrow AB \cdot CD \cdot EF_1 = DE \cdot AF_1 \cdot BC \text{ tức } F \equiv F_1$$

Như vậy ta suy ra điều phải chứng minh

b) Chứng minh rằng hai tam giác $B_1D_1F_1$ và BDF đồng dạng

$$\text{Đầu tiên ta có: } \frac{PA}{PE} = \frac{AB}{ED} = \frac{AB_1}{ED_1}$$

$$\begin{aligned} \text{Tiếp theo ta cần chứng minh } \widehat{PAB_1} &= \widehat{PED_1} \Leftrightarrow \widehat{DAB_1} - \widehat{DAB} = \widehat{DEB} - \widehat{DED_1} \\ &\Leftrightarrow 2\widehat{CAB} - \widehat{DAB} = \widehat{DEB} - 2\widehat{DEC} \Leftrightarrow \widehat{CAB} - (\widehat{DAB} - \widehat{CAB}) = \widehat{DEB} - \widehat{DEC} - \widehat{DEC} \\ &\Leftrightarrow \widehat{CAB} - \widehat{DAC} = \widehat{CEB} - \widehat{DEC} \end{aligned}$$

Mà $\widehat{CAB} = \widehat{CEB}; \widehat{DEC} = \widehat{DAC}$; nên suy ra hệ thức trên luôn đúng và $\widehat{PAB_1} = \widehat{PED_1}$

$$\text{Kết hợp với } \frac{PA}{PE} = \frac{AB}{ED} = \frac{AB_1}{ED_1} \text{ suy ra } \Delta PAB_1 \sim \Delta PED_1 \Rightarrow \frac{PB_1}{PD_1} = \frac{PA}{PE} = \frac{PB}{PD} \quad (1)$$

$$\text{Cùng với } \widehat{APB_1} = \widehat{EPD_1} \text{ ta suy ra } \widehat{D_1PB_1} = \widehat{APE} = \widehat{BPD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \Delta BPD \sim \Delta B_1PD_1 \Rightarrow \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{PB}{PB_1} = \frac{PD}{PD_1}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \frac{DF}{D_1F_1} = \frac{PD}{PD_1} = \frac{PF}{PF_1}; \frac{FB}{F_1B_1} = \frac{PB}{PB_1} = \frac{PF}{PF_1};$$

$$\text{Từ 3 chuỗi tỉ số bằng nhau ta suy ra } \frac{BD}{B_1D_1} = \frac{DF}{D_1F_1} = \frac{FB}{F_1B_1}$$

Suy ra $\Delta B_1D_1F_1 \sim \Delta BDF$ ($c-c-c$) tức ta có điều phải chứng minh

