

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi này có **01** trang

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài **150 phút**, không kể thời gian phát đề)

Bài 1: (4,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x+3}+7} - \sqrt{x-4\sqrt{x+3}+7}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x \geq 1$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = A + x$.

Bài 2: (4,0 điểm)

- Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy - 5x + y + 5 = 0$.
- Tìm số tự nhiên n để $4^{n^2+n+1} + 1$ là số nguyên tố.

Bài 3: (4,0 điểm)

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - xy^2 + y^4 = 1 \\ x - y^2 + xy^2 = 1 \end{cases}$$
.

b) Một quán cà phê ở Sóc Trăng sắp khai trương đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi ly cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 15000 đồng một ly thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 4000 ly, còn từ mức giá 15000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng mỗi ly thì mỗi tháng sẽ bán ít đi 200 ly. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một ly cà phê là 5000 đồng. Hỏi cửa hàng phải bán mỗi ly cà phê với giá bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất?

Bài 4: (4,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), các đường cao AD , BE , CF đồng quy tại H , gọi P , Q lần lượt là hình chiếu của D trên AB , AC .

- Chứng minh tứ giác $APDQ$ và $BCQP$ nội tiếp.
- Gọi J là giao điểm của PQ và DF . Chứng minh J là trung điểm DF .
- Gọi M là điểm đối xứng với H qua B , N là điểm đối xứng với H qua C . Đường thẳng MF cắt AC tại K , đường thẳng NE cắt AB tại L . Chứng minh AD vuông góc với LK .

Bài 5: (4,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. P là điểm bất kỳ trên cạnh AB , đường tròn ngoại tiếp tam giác BPC cắt đoạn thẳng AC tại Q . Gọi H , K lần lượt là hình chiếu của P , Q trên BC . Tính $HP + PQ + QK$.

b) Cho 33 điểm nằm trong một hình vuông có cạnh 8 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 3 điểm trong 33 điểm trên là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 2 cm^2 .

----- **Hết** -----

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của Cán bộ coi thi 1:; Chữ ký của Cán bộ coi thi 2:

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài **150 phút**, không kể thời gian phát đề)

HƯỚNG DẪN CHẤM

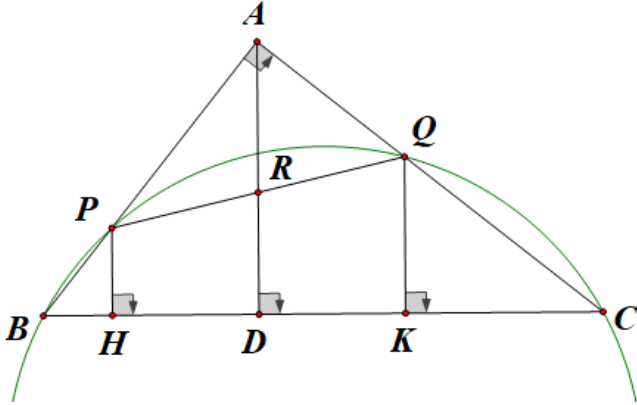
(Hướng dẫn chấm có **06** trang)

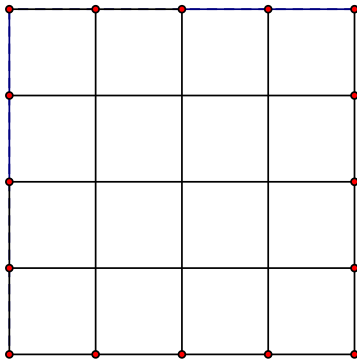
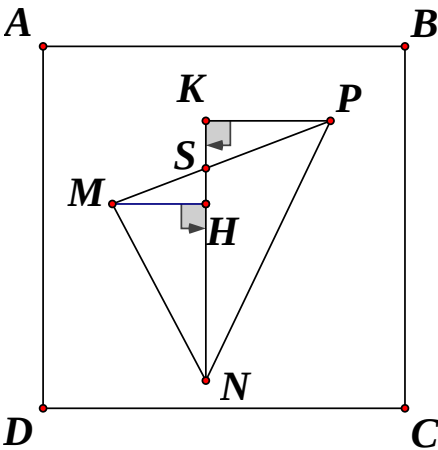
Bài	Đáp án	Điểm
1	Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x+3}+7} - \sqrt{x-4\sqrt{x+3}+7}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x \geq 1$. a) Rút gọn biểu thức A. Với $x \geq 1$, ta có $\sqrt{x+4\sqrt{x+3}+7} = \sqrt{x+3+4\sqrt{x+3}+4} = \sqrt{x+3} + 2.$ $\sqrt{x-4\sqrt{x+3}+7} = \sqrt{x+3-4\sqrt{x+3}+4} = \sqrt{x+3}-2 = \sqrt{x+3} - 2.$ $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2x-1}+1).$ $\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2x-1}-1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2x-1}-1).$ Khi đó $A = \frac{\sqrt{x+3}+2 - \sqrt{x+3}+2}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2x-1}+1 + \sqrt{2x-1}-1)} = \frac{4}{\sqrt{4x-2}}.$ b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = A + x$. $T = \frac{4}{\sqrt{4x-2}} + x.$ $T = \frac{2}{\sqrt{4x-2}} + \frac{2}{\sqrt{4x-2}} + \frac{4x-2}{4} + \frac{1}{2}.$ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $\frac{2}{\sqrt{4x-2}} + \frac{2}{\sqrt{4x-2}} + \frac{4x-2}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{4x-2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{4x-2}} \cdot \frac{4x-2}{4}} = 3.$ Khi đó $T \geq \frac{7}{2}.$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2}{\sqrt{4x-2}} = \frac{4x-2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{7}{2}$ khi $x = \frac{3}{2}.$	4,0
2	a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy - 5x + y + 5 = 0.$	4,0

Bài	Đáp án	Điểm
	Ta có $(x-1)y = x^2 - 5x + 5$ (1). Khi $x=1$. Phương trình (1) trở thành $0=1$ (vô lý). Khi $x \neq 1$. Phương trình (1) tương đương với $y = \frac{x^2 - 5x + 5}{x-1} \Leftrightarrow y = x - 4 + \frac{1}{x-1}.$ Mà x, y là số nguyên nên $x-1$ là ước của 1. Khi đó $\begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=-1 \\ x=0 \Rightarrow y=-5 \end{cases}$. Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(2; -1), (0; -5)$.	
	b) Tìm số tự nhiên n để $4^{n^2+n+1} + 1$ là số nguyên tố.	
	Với mọi số tự nhiên n, ta có $n^2 + n = n(n+1)$ luôn là số chẵn. Ta có $4^{n^2+n+1} + 1 = 4.4^{n^2+n} + 1$. Mà $4 \equiv -1 \pmod{5}$. $\Rightarrow 4.4^{n^2+n} + 1 \equiv 4.1 + 1 \equiv 0 \pmod{5}.$ Hay $4^{n^2+n+1} + 1 \vdots 5, \forall n \in \mathbb{N}$. Do đó $4^{n^2+n+1} + 1$ là số nguyên tố khi $4^{n^2+n+1} + 1 = 5$. $\Leftrightarrow 4^{n^2+n+1} = 4 \Leftrightarrow n^2 + n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 + n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=-1 \text{ (loại)} \end{cases}.$ Vậy $4^{n^2+n+1} + 1$ là số nguyên tố khi $n=0$.	
3	a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - xy^2 + y^4 = 1 & (1) \\ x - y^2 + xy^2 = 1 & (2) \end{cases}$.	4,0
	Ta có $(2) \Leftrightarrow x - 1 + (x-1)y^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(y^2 + 1) = 0$ $\Leftrightarrow x=1 \text{ (do } y^2 + 1 > 0 \text{)}.$ Với $x=1$, phương trình (1) trở thành $-y^2 + y^4 = 0 \Leftrightarrow y^2(-1 + y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \\ y=-1 \end{cases}.$ Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1; 1), (1; -1), (1; 0)$.	
	b) Một quán cà phê ở Sóc Trăng sắp khai trương đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi ly cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 15000 đồng một ly thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 4000 ly, còn từ mức giá 15000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng mỗi ly thì mỗi tháng sẽ bán ít đi 200 ly. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một ly cà phê là 5000 đồng. Hỏi cửa hàng phải bán mỗi ly cà phê với giá bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất?	

Bài	Đáp án	Điểm
	Gọi x (nghìn đồng) là số tiền tăng thêm khi bán mỗi ly cà phê ($x \geq 0$). Số ly cà phê bán được là $4000 - 100x$ (ly). Lợi nhuận thu được là $(15 + x)(4000 - 200x) - 5(4000 - 200x) = -200x^2 + 2000x + 40000 \text{ (nghìn đồng)}.$ Ta có $-200x^2 + 2000x + 40000 = -200(x^2 - 10x - 200)$ $= -200[(x - 5)^2 - 225] \leq 45000.$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$. Vậy cửa hàng bán mỗi ly cà phê 20000 đồng thì đạt được lợi nhuận lớn nhất.	
4	Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H, gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC. a) Chứng minh tứ giác $APDQ$ và $BCQP$ nội tiếp.	4,0
	Ta lại có $APD = AQD = 90^\circ$. Khi đó $APD + AQD = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $APDQ$ nội tiếp đường tròn. Do đó $AQP = ADP$. Mà $ADP = PBC$ (cùng phụ BDP). Nên $AQP = PBC$. Lại có $AQP + PQC = 180^\circ \Rightarrow AQP + PBC = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $BCQP$ nội tiếp. b) Gọi J là giao điểm của PQ và DF. Chứng minh J là trung điểm DF.	

Bài	Đáp án	Điểm
	Gọi R là giao điểm của PQ và FC. Ta có $FCB = PDB$ (đồng vị). $PDB = BAD$ (cùng phụ ABD). $BAD = PQD$ (cùng chắn PD). Suy ra $FCB = PQD$. Do đó tứ giác $RQCD$ nội tiếp. Vì thế $DRC = DQC = 90^\circ$ hay $DRF = 90^\circ$. Khi đó $DPF = PFR = DRF = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $DPFR$ là hình chữ nhật. Mà J là giao điểm của PQ và DF nên J là trung điểm DF.	
	c) Gọi M là điểm đối xứng với H qua B, N là điểm đối xứng với H qua C. Đường thẳng MF cắt AC tại K, đường thẳng NE cắt AB tại L. Chứng minh AD vuông góc với LK.	
	Ta có $BFC = BEC = 90^\circ$. Khi đó F và E cùng nhìn BC một góc 90°. Do đó tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Khi đó $AEF = ABC$. Ta có $\triangle HFB$ đồng dạng tam giác $\triangle HEC$. Suy ra $\triangle FBM$ đồng dạng tam giác $\triangle ECN$.	

Bài	Đáp án	Điểm
	Do đó $BFM = CEN \Rightarrow KFL = LEK$. Suy ra tứ giác $LKEF$ nội tiếp. Khi đó $ALK = AEF$. Mà $AEF = ABC$. Suy ra $ALK = ABC$ nên $LK \parallel BC$. Mà $AD \perp BC$ nên $AD \perp LK$.	
5	a) Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. P là điểm bất kỳ trên cạnh AB, đường tròn ngoại tiếp tam giác BPC cắt đoạn thẳng AC tại Q. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của P, Q trên BC. Tính $HP + PQ + QK$.  Gọi D là hình chiếu của A trên BC; R là giao điểm của PQ và AD. Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (cm). $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4$ (cm). Ta có $ABC = AQP$ ($BPQC$ tứ giác nội tiếp). $ABC = DAC$ (cùng phụ ACB). Do đó $DAC = AQP$. Khi đó $\triangle ARQ$ cân tại R nên $RA = RQ$ (1). Ta có $ACB = APQ$ ($BPQC$ tứ giác nội tiếp). $ACB = DAB$ (cùng phụ ABC). Do đó $DAB = APQ$. Khi đó $\triangle ARP$ cân tại R nên $RA = RP$ (2). Từ (1) và (2), ta được R là trung điểm PQ và $QP = RP + RQ = 2RA$ (3). Mà $PH \parallel QK$ (cùng vuông BC) nên tứ giác $HPQK$ là hình thang. Lại có R là trung điểm PQ và $RD \perp BC$ nên RD là đường trung bình của hình thang $HPQK$. Do đó $HP + QK = 2RD$ (4). Từ (3) và (4), ta được $HP + PQ + QK = 2(RA + RD) = 2AD = 4,8$ (cm). b) Cho 33 điểm nằm trong một hình vuông có cạnh 8 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 3 điểm trong 33 điểm trên là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích	4,0

Bài	Đáp án	Điểm
	không lớn hơn 2 cm^2.  Chia hình vuông thành 16 hình vuông nhỏ, mỗi hình vuông nhỏ có cạnh 2 cm (như hình vẽ). Theo nguyên lí Dirichlet sẽ có 3 điểm trong 33 điểm đã cho nằm trong hoặc trên cạnh của hình vuông nhỏ (hình vuông cạnh 2 cm).  Xét 3 điểm M, N, P nằm trong hình vuông $ABCD$ có cạnh 2 cm. Xét các đường thẳng vẽ từ M, N, P song song với AD. Sẽ có một đường nằm giữa hai đường kia, không mất tính tổng quát, giả sử $NS \parallel AD$. Kẻ MH và PK vuông góc NS. Ta có $S_{MNP} = S_{MNS} + S_{NSP} = \frac{1}{2}(MH \cdot NS + PK \cdot NS)$ $= \frac{1}{2}NS(MH + PK) \leq \frac{1}{2}AB \cdot AD = 2.$	

Ghi chú: Thí sinh có thể giải theo cách khác. Nếu đúng vẫn cho đủ số điểm theo quy định của từng bài.

----- HẾT -----