

Môn: TOÁN

Bài 1: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_0 = 2022$ và $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} - 1, \forall n \geq 0$.

Chứng minh rằng dãy số (a_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $3(ab + bc + ca) \leq 7 + 2abc$.

Bài 3: Tìm tất cả các bộ ba số thực đôi một phân biệt $(x; y; z)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = -\frac{1}{2}x + y + 4z \\ x^2 + y^2 = -x + 2y + 2z \\ y^2 = \frac{1}{2}x + z \end{cases}.$$

Bài 4: Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(f(x) + f(y)) = 4x + 4y + 5, \text{ với mọi số nguyên dương } x, y.$$

Bài 5: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính không bằng nhau và cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi CD và EF là các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') , trong đó C và E thuộc đường tròn (O) ; D và F thuộc đường tròn (O') ; các điểm A và C nằm cùng phía đối với đường thẳng OO' . Chứng minh rằng tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại A đi qua giao điểm của CD và OO' .

Bài 6: Cho số nguyên dương n có ít nhất hai ước nguyên tố. Chứng minh rằng luôn tồn tại các số nguyên dương a, b, c không lớn hơn n sao cho đa thức

$$ax^2 + bx + c \text{ có hai nghiệm thực phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa } |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{n}.$$

----- HẾT -----