

Câu 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) , (y_n) , (z_n) , $n = 1, 2, \dots$ được xác định như sau:

$$x_1 = 2021, x_{n+1} = 2022 + \sum_{k=1}^n (kx_k), y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}, z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[k]{x_k}}, n = 1, 2, \dots$$

a) Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $z_p > 2021^{2022}$.

Câu 2 (5,0 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(y) - xy$ là ước số nguyên dương của $xf(x) + y^3$ với mọi số nguyên dương x, y .

a) Tính các giá trị của $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

b) Tìm tất cả các hàm số đã cho.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho m, n là các số nguyên dương. Kí hiệu $S(m, n)$ là số bộ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gồm n số nguyên $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(i) $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq n$.

(ii) $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ chia hết cho m .

Tính các giá trị của $S(m, n)$ khi:

a) $m = 3, n = 6$.

b) $m = 47, n = 2021$.

Câu 4 (5,0 điểm). Cho đường tròn (I) tiếp xúc với đường thẳng Δ . Tam giác ABC thay đổi và ngoại tiếp đường tròn (I) sao cho hai đỉnh B, C nằm trên đường thẳng Δ ; trung điểm E của đoạn thẳng AD nằm trên đường tròn (I) , trong đó D là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng Δ . Gọi (J) là đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A của tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng đường thẳng EJ luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC . Đường thẳng EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC tại điểm thứ hai là G . Chứng minh rằng đường thẳng GJ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC .

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

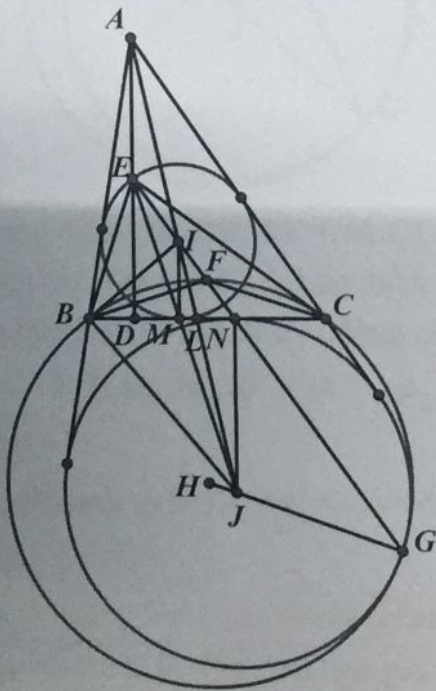
HƯỚNG DẪN CHẤM

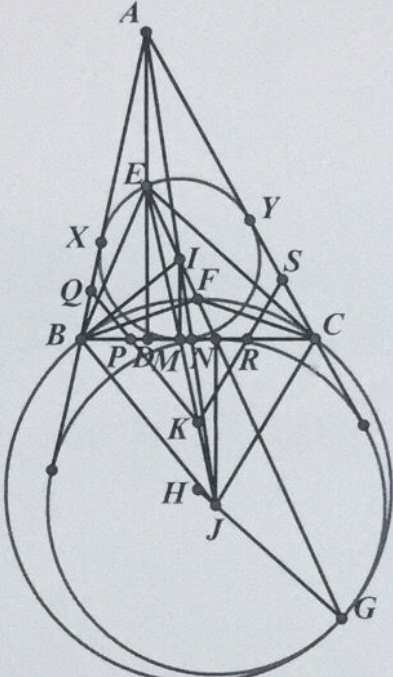
(Gồm 05 trang)

Điểm	Nội dung trình bày	Điểm
5,0	Cho dãy số $(x_n), (y_n), (z_n), n = 1, 2, \dots$ được xác định như sau: $x_1 = 2021, x_{n+1} = 2022 + \sum_{k=1}^n (kx_k), y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}, z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[k]{x_k}}, n = 1, 2, \dots$ a) Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn. b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $z_p > 2021^{2022}$.	
3,0	Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.	
1,0	Từ công thức truy hồi của dãy ta được: $x_n = 2022 + \sum_{k=1}^{n-1} (kx_k) = 2022 + (n-1)x_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} (kx_k) = (n-1)x_{n-1} + x_{n-1} = nx_{n-1}.$	
0,5	$x_n = nx_{n-1} = n(n-1)x_{n-2} = \dots = n!x_1 = 2021n!$	
1,0	$y_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2021} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) < \frac{1}{2021} \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \right)$ $= \frac{1}{2021} \left(1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2021} \left(2 - \frac{1}{n} \right) < \frac{2}{2021}.$ Suy ra dãy (y_n) là dãy số bị chặn trên.	
0,5	Kết hợp với dãy (y_n) là dãy số tăng ta được dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn.	
2,0	Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $z_p > 2021^{2022}$.	
0,5	Ta có $x_k = 2021.k! < 2021.k^k \Rightarrow \sqrt[k]{x_k} < \sqrt[k]{2021.k^k} = \sqrt[k]{2021.k}$.	
0,5	Suy ra $\frac{1}{\sqrt[k]{x_k}} > \frac{1}{\sqrt[k]{2021.k}} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[k]{x_k}} > \frac{1}{\sqrt[k]{2021}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$	
0,5	Xét hàm số $f(x) = \ln x, x \in [k; k+1]$, theo định lí Lagrange tồn tại $c \in (k; k+1)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(k+1) - f(k)}{k+1 - k} = \ln(k+1) - \ln(k) \Rightarrow \ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c} < \frac{1}{k}, \text{ với mọi số } k$ nguyên dương.	
0,5	Do đó $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[k]{x_k}} > \frac{1}{\sqrt[k]{2021}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) > \frac{1}{\sqrt[k]{2021}} (\ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n)$ $= \frac{1}{\sqrt[n]{2021}} \cdot \ln(n+1).$ Chú ý: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2021}} \cdot \ln(n+1) \right) = +\infty$ nên với p là số nguyên tố đủ lớn ta có: $z_p > 2021^{2022}, \text{ kết hợp với tập hợp các số nguyên tố là vô hạn nên ta có thể chọn được}$ vô số các số nguyên tố p đủ lớn sao cho $z_p > 2021^{2022}$.	

2	Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + f(y) - xy$ là ước số nguyên dương của $xf(x) + y^3$ với mọi số nguyên dương x, y. a) Tính các giá trị của $f(1), f(2), f(3)$. b) Tìm tất cả các hàm số đã cho.	5,0
2a	Tính các giá trị của $f(1), f(2), f(3)$.	3,0
	Kí hiệu $P(x, y)$ là phép thế biến vào giả thiết bài toán. $P(1, 1) \Rightarrow 2f(1) - 1 \mid f(1) + 1 \Rightarrow 2f(1) - 1 \mid 2f(1) - 1 + 3 \Rightarrow 2f(1) - 1 \mid 3 \Rightarrow 2f(1) - 1 \in \{1, 3\}$	0,5
	$\Rightarrow 2f(1) - 1 = 3 \Leftrightarrow f(1) = 2$. Dùng phép thế $P(2, 1)$ ta được: $f(2) + f(1) - 2 \mid 2f(2) + 1 \Rightarrow f(2) \mid 1 \text{ suy ra } f(2) = 1.$ Theo giả thiết $f(2) + f(2) - 2 \cdot 2 > 0 \Leftrightarrow f(2) > 2$ vô lí. $\Rightarrow 2f(1) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$.	0,5
	Dùng phép thế $P(2, 1)$ ta được: $f(2) + f(1) - 2 \mid 2f(2) + 1 \Rightarrow f(2) - 1 \mid 2(f(2) - 1) + 3 \Rightarrow f(2) - 1 \mid 3$ Chú ý $f(2) > 2$ nên chỉ có $f(2) - 1 = 3 \Leftrightarrow f(2) = 4$.	1,0
	Dùng phép thế $P(3, 1)$ ta được: $f(3) + f(1) - 3 \mid 3f(3) + 1 \Rightarrow f(3) - 2 \mid 3(f(3) - 2) + 7 \Rightarrow f(3) - 2 \mid 7$ Chú ý $f(3) + f(3) - 3 \cdot 3 > 0 \Leftrightarrow f(3) > \frac{9}{2}$ nên chỉ có $f(3) - 2 = 7 \Leftrightarrow f(3) = 9$.	1,0
2b	Tìm tất cả các hàm số đã cho.	2,0
	Với mỗi $x \in \mathbb{N}^*$, xét phép thế $P(x, x) \Rightarrow 2f(x) - x^2 > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{x^2}{2}$. $P(x, 1) \Rightarrow f(x) - x + 1 \mid xf(x) + 1 \Rightarrow f(x) - x + 1 \mid x(f(x) - x + 1) + x^2 - x + 1$ $\Rightarrow f(x) - x + 1 \mid x^2 - x + 1 \quad (1)$ $\Rightarrow f(x) \leq x^2 \quad (2).$ $P(x, x) \Rightarrow 2f(x) - x^2 \mid xf(x) + x^3 \Rightarrow 2f(x) - x^2 \mid x(2f(x) - x^2) + 3x^3 \Rightarrow 2f(x) - x^2 \mid 3x^3 \quad (3)$	0,5
	Từ (3) lấy $x = p$ là số nguyên tố ta được: $2f(p) - p^2 \mid 3p^3$, kết hợp với $0 < 2f(p) - p^2 \leq 2p^2 - p^2 = p^2$ ta được: $2f(p) - p^2 \in \{1, 3, p, 3p, p^2\}$.	0,5
	Sử dụng (1) ta kiểm tra được $2f(p) - p^2 \in \{1, 3, p\}$ không thỏa mãn Với $2f(p) - p^2 = 3p$, kết hợp (1) ta được: $f(p) - p + 1 \mid p^2 - p + 1 \Rightarrow p^2 + p + 2 \mid 2(p^2 - p + 1) \Rightarrow p^2 + p + 2 \mid 2(p^2 + p + 2) - 4p - 2$ $\Rightarrow p^2 + p + 2 \mid 4p + 2 \Rightarrow p^2 + p + 2 \leq 4p + 2 \Leftrightarrow p \leq 3, \text{ thử thấy chỉ có } p = 3 \text{ thỏa mãn và ta được } f(3) = 9.$ Như vậy chỉ còn đẳng thức $2f(p) - p^2 = p^2 \Leftrightarrow f(p) = p^2 \quad (4)$.	0,5
	$P(x, p) \Rightarrow f(x) - xp + p^2 \mid xf(x) + p^3$ $\Rightarrow f(x) - xp + p^2 \mid xf(x) + p(p^2 - xp + f(x)) + p^2x - pf(x)$	0,5

	$\Rightarrow f(x) - xp + p^2 \mid xf(x) + p^2x - pf(x)$ $\Rightarrow f(x) - xp + p^2 \mid x(p^2 - px + f(x)) + px^2 - pf(x) \Rightarrow f(x) - xp + p^2 \mid px^2 - pf(x) \quad (5)$ Cho $p \rightarrow +\infty$ ta được (5) thỏa mãn khi $x^2 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2$. Thử lại thấy thỏa mãn, vậy hàm số cần tìm là $f(x) = x^2$.	
3	Cho m, n là các số nguyên dương. Kí hiệu $S(m, n)$ là số bộ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gồm n số nguyên $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: (i) $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq n$. (ii) $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ chia hết cho m. Tính các giá trị của $S(m, n)$ khi: a) $m = 3, n = 6$. b) $m = 47, n = 2021$.	5,0
3a	$m = 3, n = 6$.	3,0
	Xét bộ số gồm 6 số nguyên $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_6 \leq 6$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_6$ chia hết cho 3, ta đặt $y_i = x_i + i, i = 1, 2, \dots, 6$. Khi đó $y_1 < y_2 < \dots < y_6$ và $y_1 + y_2 + \dots + y_6 = x_1 + x_2 + \dots + x_6 + 1 + 2 + \dots + 6 = x_1 + x_2 + \dots + x_6 + 21 \vdots 3$. Từ đó suy ra mỗi bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_6 \leq 6$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_6$ chia hết cho 3 tương ứng với một bộ số $(y_1, y_2, \dots, y_6)$ thỏa mãn $1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_6 \leq 12$ và $y_1 + y_2 + \dots + y_6$ chia hết cho 3.	1,0
	Xét đa thức $P(x, y) = (1 + xy)(1 + x^2y) \dots (1 + x^{12}y) = \sum (a_{m,k} x^m y^k)$, trong đó $a_{m,k}$ là số tập hợp có k phần tử và tổng các phần tử bằng m. Khi đó theo định lí Ruffini ta có: $\sum_{m \geq 3} (a_{m,k} y^k) = \frac{1}{3} (P(1, y) + P(\varepsilon, y) + P(\varepsilon^2, y))$ $P(1, y) = (1 + y)^{12}$ $P(\varepsilon, y) = (1 + \varepsilon y)(1 + \varepsilon^2 y) \dots (1 + \varepsilon^{12} y) = ((1 + \varepsilon y)(1 + \varepsilon^2 y) \dots (1 + \varepsilon^3 y))^4 = (y^3 + 1)^4$ $P(\varepsilon^2, y) = (1 + \varepsilon^2 y)(1 + \varepsilon^4 y) \dots (1 + \varepsilon^{24} y) = ((1 + \varepsilon y)(1 + \varepsilon^2 y) \dots (1 + \varepsilon^3 y))^4 = (y^3 + 1)^4$	1,0
	$\sum_{m \geq 3} (a_{m,k} y^k) = \frac{1}{3} ((1 + y)^{12} + 2(1 + y^3)^4)$ Ta có $S(3, 6) = \sum_{m \geq 3} a_{m,6} = \frac{C_{12}^6 + 2C_4^2}{3} = 312$.	1,0
3b	$m = 47, n = 2021$.	2,0
	Xét bộ số gồm 2021 số nguyên $(x_1, x_2, \dots, x_{2021})$ thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2021} \leq 2021$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_{2021}$ chia hết cho 47, ta đặt $y_i = x_i + i, i = 1, 2, \dots, 2021$. Khi đó $y_1 < y_2 < \dots < y_{2021}$ và $y_1 + y_2 + \dots + y_{2021} = x_1 + x_2 + \dots + x_{2021} + 1 + 2 + \dots + 2021 = x_1 + x_2 + \dots + x_{2021} + 2021 \cdot 1011 \vdots 47.$ Từ đó suy ra mỗi bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_{2021})$ thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2021} \leq 2021$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_{2021}$ chia hết cho 47 tương ứng với một bộ số $(y_1, y_2, \dots, y_{2021})$ thỏa mãn	0,5

	$1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_{2021} \leq 4042$ và $y_1 + y_2 + \dots + y_{2021}$ chia hết cho 2021.	
	Xét đa thức $P(x, y) = (1 + xy)(1 + x^2y) \dots (1 + x^{4042}y) = \sum (a_{m,k} x^m y^k)$, trong đó $a_{m,k}$ là số tập hợp có k phần tử và tổng các phần tử bằng m. Khi đó theo định lý Ruffini ta có: $\sum_{m:47} (a_{m,k} y^k) = \frac{1}{47} (P(1, y) + P(\varepsilon, y) + \dots + P(\varepsilon^{46}, y))$ $P(1, y) = (1 + y)^{4042}$ Với $j \in \{1, 2, \dots, 46\}$ ta có: $P(\varepsilon^j, y) = (1 + \varepsilon^j y)(1 + \varepsilon^{2j} y) \dots (1 + \varepsilon^{4021j} y) = ((1 + \varepsilon y)(1 + \varepsilon^2 y) \dots (1 + \varepsilon^{47} y))^{86} = (y^{47} + 1)^{86}$	1,0
	$\sum_{m:47} (a_{m,k} y^k) = \frac{1}{47} ((1 + y)^{4042} + 46(y^{47} + 1)^{86})$ Ta có $S(47, 2021) = \sum_{m:47} a_{m,2021} = \frac{C_{4042}^{2021} + 46C_{86}^{43}}{47}$	0,5
4	Cho đường tròn (I) tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tam giác ABC thay đổi ngoại tiếp đường tròn (I) sao cho hai đỉnh B và C nằm trên đường thẳng Δ; trung điểm E của đoạn thẳng AD nằm trên đường tròn (I), trong đó D là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng Δ. Gọi (J) là đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A của tam giác ABC. a) Chứng minh rằng đường thẳng EJ luôn đi qua một điểm cố định. b) Giả sử F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC. Đường thẳng EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC tại điểm thứ hai là G. Chứng minh rằng đường thẳng GJ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC.	5,0
4a	Chứng minh rằng đường thẳng EJ luôn đi qua một điểm cố định.	3,0
		
	Giả sử đường tròn (I) , (J) tiếp xúc với cạnh BC lần lượt tại M , N (ta có điểm M là cố	1,0

	định do $(I), \Delta$ cố định). Gọi K là giao điểm của AI với BC. Ta có $J(DAMN) = (DLMN) = \frac{\overline{MD}}{\overline{ML}} : \frac{\overline{ND}}{\overline{NL}}$	
	Do $JN \parallel IM \parallel AD$ nên theo định lí Talet ta có: $\frac{\overline{MD}}{\overline{ML}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IL}}, \frac{\overline{ND}}{\overline{NL}} = \frac{\overline{JA}}{\overline{JL}}$	0,5
	Do đó $J(DAMN) = (DLMN) = \frac{\overline{MD}}{\overline{ML}} : \frac{\overline{ND}}{\overline{NL}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IL}} : \frac{\overline{JA}}{\overline{JL}} = (ALIJ) = -1$ (do BI, BJ là phần giác trong và ngoài của tam giác ABL).	0,5
	Từ $J(DAMN) = -1$ và $AD \parallel JN$ suy ra JM đi qua trung điểm của AD hay JE đi qua điểm M cố định.	1,0
4b	Giả sử F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC. Đường thẳng EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC tại điểm thứ hai là G. Chứng minh rằng đường thẳng GJ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC.	2,0
		
	Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BM, BX, CM, CY. PQ cắt RS tại điểm K, do PQ, RS tương ứng song song XM, YM nên K là trung điểm của MJ. Do PQ là trục đẳng phương của B và (I); RS là trục đẳng phương của C và (I) suy ra K là trục đẳng phương của B, C và (I) suy ra $KB^2 = KC^2 = \wp_{K/(I)} = \overline{KM} \cdot \overline{KE}$. Từ đó ta suy ra K thuộc đường tròn (BEC). Xét phép nghịch đảo cực K, phương tích $KB^2 \Rightarrow (BEC)$ tiếp xúc với (I) suy ra E, I, F thẳng hàng.	0,5
	Sử dụng kết quả cơ bản E, I, N thẳng hàng suy ra các điểm E, I, N, F thẳng hàng.	0,5
	Ta có tam giác JKN đồng dạng tam giác JNE (hai tam giác cân có chung góc đáy) suy ra $JN^2 = \overline{JK} \cdot \overline{JE} \Rightarrow$ đường tròn (BEC) trực giao với (J) suy ra phép nghịch đảo cực F,	1,0

phương tích $FB^2: B \leftrightarrow B, C \leftrightarrow C, BC \leftrightarrow (BFC), (J) \leftrightarrow (J)$.

Kết hợp với BC tiếp xúc với $(J) \Rightarrow (BFC)$ tiếp xúc với (J) tại G suy ra GJ đi qua tâm (BFC) .

Lưu ý khi chấm bài:

- Đáp án chỉ trình bày một cách giải bao gồm các ý bắt buộc phải có trong bài làm của học sinh. Khi chấm nếu học sinh bỏ qua bước nào thì không cho điểm bước đó.
- Nếu học sinh giải cách khác, giám khảo căn cứ các ý trong đáp án để cho điểm.
- Trong bài làm, nếu ở một bước nào đó bị sai thì các phần sau có sử dụng kết quả sai đó không được điểm.
- Học sinh được sử dụng kết quả phần trước để làm phần sau.
- Trong lời giải câu 4 nếu học sinh không vẽ hình thì không cho điểm.
- Điểm toàn bài tính đến 0,5 và không làm tròn.

----- Hết -----