

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Môn thi: **TOÁN**

Ngày thi: **16/9/2024**

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1. (5 điểm) Với mỗi số nguyên dương n , xét đa thức

$$P_n(x) = x^{2n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)x^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)x + 1.$$

- a)** Tìm nghiệm thực nhỏ nhất của đa thức $P_{2024}(x)$.
- b)** Với mỗi số nguyên dương n , gọi a_n là nghiệm thực lớn nhất của đa thức $P_n(x)$. Tính $\lim a_n$.

Câu 2. (5 điểm) Cho đường tròn (O) với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy C là điểm đối xứng với A qua B . Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM cắt đường tròn (O) tại điểm D và cắt đường thẳng OM tại điểm E ($D \neq B$, $E \neq M$). Gọi H là giao điểm của DE với AB và G là giao điểm của CE với BM . Chứng minh rằng các đường thẳng DM, GH cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

Câu 3. (5 điểm) Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y) \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x) = f(1)$ với mọi $x > 0$.

Câu 4. (5 điểm) Với mỗi số nguyên dương n , ta đặt

$$f(n) = d_1^2 + \cdots + d_k^2,$$

trong đó $d_1 < \cdots < d_k$ là tất cả các ước số nguyên dương của n .

- a)** Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $f(n) = n^2 + n + 1$.
- b)** Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên $P(x)$ sao cho $f(n) \mid P(n)$ với mọi số nguyên dương n .

.....**HẾT**.....

Lưu ý: Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu; Giám thị KHÔNG được giải thích gì thêm.

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Môn thi: **TOÁN**

Ngày thi: **17/9/2024**

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 5. (5 điểm) Cho số nguyên dương n và các số thực $a_1, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$\frac{a_1}{k+1} + \frac{a_2}{k+2} + \dots + \frac{a_n}{k+n} = 1$$

với mọi $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Chứng minh rằng $a_1 + \dots + a_n = n^2$.

Câu 6. (5 điểm) Cho $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên sao cho $0 < P(0) < 10^8$. Chứng minh rằng, có ít nhất một phương trình trong các phương trình dưới đây không có nghiệm nguyên

$$P(x) = x, P(x) = 2x, P(x) = 3x, \dots, P(x) = 25x.$$

Câu 7. (5 điểm) Cho số nguyên dương n . Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho ta có thể điền các số nguyên không âm vào các ô của một bảng $3 \times k$ ô vuông (bảng gồm 3 hàng và k cột) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Tổng tất cả các số được điền trong cùng một cột bằng n .
- Trong cùng một hàng, mỗi số $0, 1, \dots, n$ được điền ít nhất một lần.

Câu 8. (5 điểm) Cho tam giác ABC có J là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A . Gọi D là hình chiếu vuông góc của J trên BC ; ω là đường tròn có đường kính JD . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt ω tại các điểm M, N . Giả sử các tiếp tuyến tại M và N của ω cắt nhau tại P . Chứng minh rằng ba điểm A, P, D thẳng hàng.

.....**HẾT**.....

Lưu ý: Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu; Giám thị KHÔNG được giải thích gì thêm.

A. Hướng dẫn giải ngày thi thứ nhất

Câu 1 (5 điểm) Với mỗi số nguyên dương n , xét đa thức

$$P_n(x) = x^{2n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)x^{2n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)x + 1.$$

- a) Tìm nghiệm thực nhỏ nhất của đa thức $P_{2024}(x)$.
b) Với mỗi số nguyên dương n , gọi a_n là nghiệm thực lớn nhất của đa thức $P_n(x)$. Tính $\lim a_n$.

Bài giải.

- a) Ta có $P_n(-1) = 0$. Ta sẽ chỉ ra -1 là nghiệm nhỏ thực nhỏ nhất của $P_n(x)$. Thật vậy,

$$P'_n(x) = (2n+1)x^{2n} - 2n\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^{2n-1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Với $x < -1$ thì

$$P'_n(x) > (2n+1) + 2n\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$$

Do đó $P_n(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1]$. Thành thử, nếu $x < -1$ thì $P_n(x) < P_n(-1) = 0$.

Vậy, với mọi số nguyên dương n , $x = -1$ là nghiệm nhỏ nhất của $P_n(x)$.

- b) Gọi a_n là nghiệm thực lớn nhất của đa thức $P_n(x)$. Ta có

$$P_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 1 < 0.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$ nên trong khoảng $\left(1 + \frac{1}{n}; +\infty\right)$ có một nghiệm thực. Vậy, $x_n > 1 + \frac{1}{n}$, với mọi $n \geq 1$.

Mặt khác, dễ ý rằng

$$(2n+1)\left(1 + \frac{2}{n}\right) - 2n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 3 + \frac{2}{n}$$

do đó trên $I_n = \left[1 + \frac{2}{n}; +\infty\right)$ ta có

$$P'_n(x) \geq \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n-1} \left(3 + \frac{2}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$$

Thành thử, $P_n(x)$ đồng biến trên I_n . Mặt khác,

$$P_n\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n} \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) + 1 = \frac{1}{n} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n} - 3 - \frac{2}{n} \right) > 0.$$

Vậy $x_n \leq 1 + \frac{2}{n}$ với mọi $n \geq 1$. Do đó $\lim x_n = 1$.

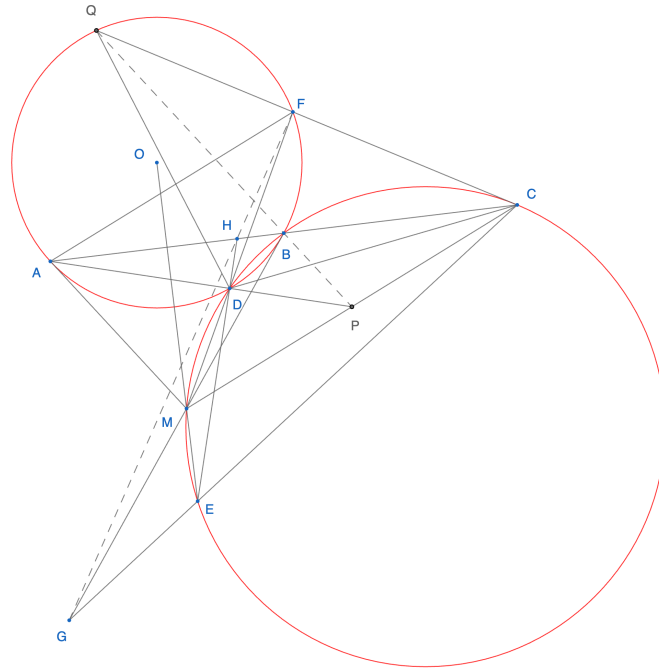
Nhận xét. Có thể chứng minh $\lim n(x_n - 1)$ tồn tại và ≈ 1.99 .

Câu 2 (5 điểm) Cho đường tròn (O) với dây cung AB không đi qua tâm. Lấy C là điểm đối xứng với A qua B . Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM cắt đường tròn (O) tại điểm D và cắt đường thẳng OM tại điểm E ($D \neq B$, $E \neq M$). Gọi H là giao điểm của DE với AB và G là giao điểm của CE với BM . Chứng minh rằng các đường thẳng DM, GH cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

Bài giải. Gọi F là giao điểm thứ hai của MD với đường tròn (O) , P là giao điểm của AD và Q là giao điểm thứ hai của CF với (O) . Ta có

$$\angle FAC = \angle FDB = \angle BCM.$$

Vậy $AF \parallel MC$. Từ đó, $\angle DAM = \angle DFA = \angle DMC$. Suy ra $\triangle APM \sim \triangle MPD$ ($g - g$). Vậy $PM^2 = PD \cdot PA$. Chứng minh tương tự, $\angle MCD = \angle MBD = \angle BAD$, nên suy ra $\triangle APC \sim \triangle CPD$. Vậy, $PC^2 = PD \cdot PA$. Từ đó ta được P là trung điểm CM .



Mặt khác,

$$\angle PCQ = \angle AFQ = \angle ADQ.$$

Vậy, tứ giác $CQDP$ nội tiếp, do đó

$$\angle CQP = \angle CDP = \angle PCA = \angle CAF = \angle FQB = \angle CQB.$$

Suy ra các điểm P, Q, B thẳng hàng. Vậy, BP là đường trung bình của tam giác CAM , do đó $PQ \parallel AM$. Ta có

$$\angle QCD = \angle QPD = \angle PAM = \angle PMD,$$

suy ra QC tiếp xúc với đường tròn (CBM) tại C . Áp dụng định lí Pascal cho hệ điểm $\begin{pmatrix} C & M & E \\ D & C & B \end{pmatrix}$, suy ra F, H, G thẳng hàng. Tức là DM, HG cắt nhau tại điểm thuộc đường tròn (O) .

Câu 3 (5 điểm) Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y) \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Chúng minh rằng $f(x) = f(1)$ với mọi $x > 0$.

Bài giải. Giả sử hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + 2y) \geq f(x^2 + 3y) \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ta sẽ chứng minh $f(x) = f(y)$ với mọi $x, y > 0$ hay f là hàm hằng trên $\mathbb{R}^+$. Lấy hai số $0 < a < b$ bất kì. Trong (1) thay $x = \sqrt{3b - 2a}$ và $y = a - b < 0$ với chú ý rằng $a = x^2 + 3y, b = x^2 + 2y$ ta được $f(a) \leq f(b)$. Vậy $f(x) \leq f(y)$ với mọi $x < y$.

Tiếp theo xét hai số $0 < u < v$ bất kì. Ta sẽ chứng minh $f(u) = f(v)$. Ta thấy rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{v}{u} < \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Trong (1) thay $x = 0$ ta được $f(2y) \geq f(3y)$ với mọi $y \in \mathbb{R}$. Đặc biệt $f(y) \geq f\left(\frac{3}{2}y\right)$ với mọi $y > 0$. Từ đó

$$f(u) \geq f\left(\frac{3}{2}u\right) \geq f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 u\right) \geq \dots \geq f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n u\right) \geq f(v) \geq f(u).$$

Do đó $f(u) = f(v)$. Vậy f là hàm hằng trên $\mathbb{R}^+$. Do đó $f(x) = f(1)$ với mọi $x > 0$.

Câu 4 (5 điểm)

Với mỗi số nguyên dương n , ta đặt

$$f(n) = d_1^2 + \dots + d_k^2,$$

trong đó $d_1 < \dots < d_k$ là tất cả các ước số nguyên dương của n .

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $f(n) = n^2 + n + 1$.

b) Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên $P(x)$ sao cho $f(n) \mid P(n)$ với mọi số nguyên dương n .

Bài giải. Đầu tiên ta nhận xét f là hàm nhân tính.

- a)** Giả sử n là số nguyên dương thoả mãn $f(n) = n^2 + n + 1$. Nếu n là số nguyên tố thì $f(n) = n^2 + 1 < n^2 + n + 1$, loại.

Nếu n có ít nhất một ước dương d mà $1 < d < n$. Khi đó $\frac{n}{d}$ cũng là ước dương của n . Nếu $d \neq \frac{n}{d}$ thì

$$f(n) \geq n^2 + d^2 + \frac{n^2}{d^2} + 1 \geq n^2 + 2n + 1 > n^2 + n + 1.$$

Vậy $n = d^2$. Vì n chỉ có đúng một ước dương d mà $1 < d < n$ nên d là số nguyên tố. Vậy $n = p^2$.

Thử lại, nếu p là số nguyên tố và $n = p^2$ thì $f(n) = n^2 + n + 1$.

- b)** Giả sử $P(x)$ là đa thức cần tìm. Với $n = pq$, trong đó p, q là các số nguyên tố phân biệt thì $f(pq) = (p^2 + 1)(q^2 + 1)$. Do đó

$$(p^2 + 1)(q^2 + 1) \mid P(pq).$$

Cố định số nguyên tố p , xét đa thức $Q(x) = P(px)$. Khi đó Q là đa thức hệ số nguyên và $q^2 + 1 \mid Q(q)$ với mọi số nguyên tố q . Vậy $x^2 + 1 \mid Q(x)$ trong $\mathbb{Z}[x]$. Suy ra $P(pi) = 0$ với mọi số nguyên tố p . Do đó $P \equiv 0$.

.....**HẾT NGÀY 1**.....

B. Hướng dẫn giải ngày thi thứ hai

Câu 5 (5 điểm) Cho số nguyên dương n và các số thực $a_1, \dots, a_n$ thoả mãn

$$\frac{a_1}{k+1} + \frac{a_2}{k+2} + \dots + \frac{a_n}{k+n} = 1$$

với mọi $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Chứng minh rằng $a_1 + \dots + a_n = n^2$.

Bài giải. Xét phân thức

$$f(x) = \frac{a_1}{x+1} + \dots + \frac{a_n}{x+n} - 1$$

có nghiệm $0, 1, \dots, n-1$. Ta có

$$f(x) = \frac{p(x) - (x+1)(x+2)\dots(x+n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

Với $p(x)$ là một đa thức bậc không quá $n-1$. Do đó hệ số của x^{n-1} trong $p(x)$ là $a_1 + \dots + a_n$. Ta thấy tử thức của $f(x)$ là một đa thức có nghiệm là $0, \dots, n-1$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$ nên

$$p(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+n) - x(x-1)\dots(x-(n-1)).$$

Khai triển $p(x)$ thì hệ số x^{n-1} là

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Do đó $a_1 + \dots + a_n = n^2$.

Câu 6 (5 điểm) Cho $P(x)$ là một đa thức hệ số nguyên sao cho $0 < P(0) < 10^8$. Chứng minh rằng, có ít nhất một phương trình trong các phương trình dưới đây không có nghiệm nguyên

$$P(x) = x, P(x) = 2x, P(x) = 3x, \dots, P(x) = 25x.$$

Bài giải. Phản chứng, giả sử cả 25 phương trình trên có nghiệm nguyên.

Nhận xét. Với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$ và $x \neq y$, ta có $x - y \mid P(x) - P(y)$.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ lần lượt là các nghiệm nguyên của phương trình $P(x) = x, P(x) = 2x, \dots, P(x) = 25x$. Do $P(0) \neq 0$ nên $x_i \neq 0$ với mọi $i \in \{1, \dots, 25\}$. Ta sẽ chứng minh các số $x_1, \dots, x_{25}$ đôi một phân biệt. Thật vậy, giả sử tồn tại $i \neq j$ sao cho $x_i = x_j$. Khi đó $P(x_i) = P(x_j)$ nên $ix_i = jx_j$. Từ đó $i = j$, mâu thuẫn.

Với $i, j \in \{1, \dots, 25\}$ phân biệt ta có

$$0 \equiv P(x_i) - P(x_j) = ix_i - jx_j \equiv (i - j)x_i \pmod{x_i - x_j}.$$

Do đó $x_i - x_j \mid (i - j)x_i$ với mọi $i, j \in \{1, \dots, 25\}$ phân biệt.

Xét p là số nguyên tố mà $p < 25$. Xét các số $x_1, \dots, x_p$. Nếu trong các số này, không có số nào chia hết cho p thì tồn tại hai số $1 \leq i < j \leq p$ mà $p \mid x_i - x_j$. Khi đó $p \mid i - j$, mâu thuẫn. Vậy, p là ước của ít nhất một số x_i , với $i \in \{1, 2, \dots, 25\}$ nào đó. Khi đó,

$$P(0) \equiv P(x_i) \equiv ix_i \equiv 0 \pmod{p}.$$

Thành thử, $p \mid P(0)$ với mọi số nguyên tố $p < 25$. Từ đó

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \mid P(0)$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết $0 < P(0) < 10^8$.

Câu 7 (5 điểm) Cho số nguyên dương n . Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho ta có thể điền các số nguyên không âm vào các ô của một bảng $3 \times k$ ô vuông (bảng gồm 3 hàng và k cột) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Tổng tất cả các số được điền trong cùng một cột bằng n .
- Trong cùng một hàng, mỗi số $0, 1, \dots, n$ được điền ít nhất một lần.

Bài giải. Đáp số của bài toán là $k_0 = \left\lceil \frac{3}{2}(n+1) \right\rceil$.

Xét một bảng $3 \times k$ như vậy. Giả sử S là tổng của tất cả các số của bảng. Tổng các số ở mỗi hàng lớn hơn hoặc bằng $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Do đó

$$S \geq \frac{3n(n+1)}{2}.$$

Mặt khác, điều kiện thứ nhất cho ta $S = kn$. Vậy $kn \geq \frac{3n(n+1)}{2}$ hay $k \geq \frac{3}{2}(n+1)$.

Ta xét 2 trường hợp, dựa trên tính chẵn lẻ của n .

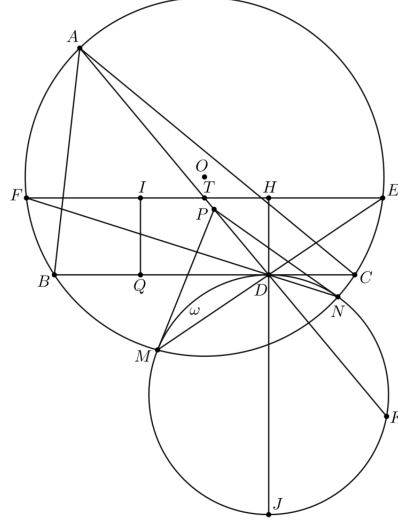
TH1. Với n lẻ: Ta sẽ lấy hợp của các cột $(0, a, n-a); (n-a, 0, a); (a, n-a, 0)$, $0 \leq a \leq \frac{n-1}{2}$.

TH2. Với n chẵn: Ta sẽ lấy hợp của các cột $(0, a, n-a); (n-a, 0, a); (a, n-a, 0)$, $0 \leq a \leq \frac{n}{2} - 1$ và 2 cột $\left(0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right); \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0\right)$.

Câu 8 (5 điểm) Cho tam giác ABC có J là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A . Gọi D là hình chiếu vuông góc của J trên BC ; ω là đường tròn có đường kính JD . Đường tròn ngoại tiếp

tam giác ABC cắt ω tại hai điểm M, N . Giả sử các tiếp tuyến tại M và N của ω cắt nhau tại P . Chứng minh rằng ba điểm A, P, D thẳng hàng.

Bài giải. Gọi $I, (O)$ theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường thẳng đi qua I , song song với BC cắt (O) tại E, F . Gọi H là giao điểm của DJ và EF . Q là hình chiếu vuông góc của I trên BC . Gọi K là giao điểm thứ hai (khác D) của AD và ω . Gọi T là giao điểm của AD và EF . Ta có:



$$\overline{DH} \cdot \overline{DJ} = \overline{QI} \cdot \overline{DJ} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} := k$$

Suy ra phép nghịch đảo I_D^k biến (O) thành (O) và biến ω thành EF . Do đó $I_D^k : (O) \cap \omega \rightarrow (O) \cap EF$. Suy ra $I_D^k : M \rightarrow F, N \rightarrow$. Vậy M, D, E thẳng hàng và N, D, F thẳng hàng.

Ta lấy Q' đối xứng Q qua I . Khi đó Q' thuộc AD (kết quả quen thuộc). Vì $IT \parallel QD$ nên T là trung điểm của $Q'D$. Do đó T thuộc trung trực của QD . Vậy OT vuông góc với BC . Suy ra T là trung điểm của EF . Chú ý rằng $DQ \parallel EF$, ta có: $D(QTEF) = -1$. Suy ra

$$(DKMN) = D(DKMN) = D(QTEF) = -1$$

Vậy $MDNK$ là tứ giác điều hòa. Suy ra P thuộc $DK \equiv AD$.

HƯỚNG DẪN CHẤM

A) Hướng dẫn chung:

- 1) Học sinh làm đúng đến đâu thì chấm đến đó.
- 2) Học sinh trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo chấm tương ứng biểu điểm của hướng dẫn chấm dưới đây.

B) Hướng dẫn cụ thể:

Câu 1. 5,0 điểm

a) (1,5 điểm)

- +/- -1 là nghiệm: **0,5 điểm**.
- +/- Chứng minh -1 là nghiệm nhỏ nhất: **1,0 điểm**

b) (3,5 điểm)

- +/- Chứng minh $x_n \geq 1 + \frac{1}{n}$: **1,0 điểm**
- +/- Chứng minh $x_n \leq 1 + \frac{2}{n}$: **2,0 điểm**
- +/- Chỉ ra $\lim x_n = 1$: **0,5 điểm**

Câu 2. 5,0 điểm

Câu 3. 5,0 điểm

- o Chứng minh f không giảm: **2,0 điểm**
- o Chứng minh f hằng trên $\mathbb{R}^+$: **3,0 điểm**

Câu 4. 5,0 điểm

a) (2,0 điểm)

- +/- Chứng minh $n = p^2$: **1,5 điểm**.
- +/- Thử lại $n = p^2$: **0,5 điểm**.

b) (3,0 điểm).

Câu 5. 5,0 điểm

Câu 6. 5,0 điểm

- o Chứng minh $x_1, \dots, x_{25}$ khác không: **0,5 điểm**
- o Chứng minh $x_1, \dots, x_{25}$ phân biệt: **1,0 điểm**
- o Chứng minh $x_1, \dots, x_{25}$ chia hết mọi số nguyên tố $p < 25$: **2,5 điểm**

Câu 7. 5,0 điểm

- +/- Chứng minh $k \geq \frac{3(n+1)}{2}$: **2 điểm**
- +/- Dựng mô hình, mỗi trường hợp: **1,5 điểm**

Câu 8. 5,0 điểm