

Đề chính thức

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho a, b, c là ba số thực khác 0 sao cho $a + b + c = 0$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2$$

b) Tính giá trị biểu thức :

$$P = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2}}$$

Câu 2. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = x \\ y^2 + 2xy = y \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm) Giải phương trình : $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = -x^2 + 8x - 14$

Câu 4. (3,0 điểm) Tìm m để phương trình $x^2 - (m+1)x + m + 3 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh AB, AC của tam giác ABC vuông tại A và có $BC = 5$

Câu 5. (4,0 điểm) Cho ba đường thẳng cố định a, b, c song song nhau, sao cho b nằm giữa và cách đều a và c . Một đường thẳng d cố định, vuông góc a , lần lượt cắt a, b, c tại A, B, C . Trên đoạn AB lấy điểm I sao cho $IA = 2IB$. Gọi D là một điểm di động trên c . Trên b lấy điểm E sao cho $IE = \frac{1}{2}ID$. Đường thẳng DE cắt a tại F

a) Lấy điểm H trên đoạn ED sao cho $HE = \frac{1}{2}HD$. Chứng minh rằng $\angle FIH = 90^\circ$

b) Chứng minh đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

Câu 6. (3,0 điểm) Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa $(x+y)^4 + 5z = 63x$

Tính giá trị biểu thức $Q = x + y + z$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (4,0 điểm)

c) Cho a, b, c là ba số thực khác 0 sao cho $a + b + c = 0$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2$$

Ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{a+b+c}{abc} \right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

d) Tính giá trị biểu thức :

$$P = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2}}$$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \forall k \geq 2$

Thật vậy, theo câu a ta có :

$$\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(-k-1)^2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)^2} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \forall k \geq 2$$

Khi đó :

$$\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \dots; \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2}} = 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

Cộng vế theo vế, ta được $P = 7 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{133}{18}$

Câu 2. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = x \\ y^2 + 2xy = y \end{cases}$$

Ta có :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = x(1) \\ y^2 + 2xy = y(2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo vế ta được : $x^2 - xy = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = y \end{cases}$

*) $x = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow y^2 + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

*) $x = y \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 3y^2 - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;0), (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}), (1;0); (1;-1)$

Câu 3. (3,0 điểm) Giải phương trình : $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = -x^2 + 8x - 14$

Điều kiện : $3 \leq x \leq 5$. Đặt $a = \sqrt{x-3}, b = \sqrt{5-x} (a, b \geq 0)$

Khi đó : $\begin{cases} a+b = a^2b^2 + 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = a^2b^2 + 1 \\ (a+b)^2 - 2ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = a^2b^2 + 1 \\ (a^2b^2 + 1)^2 - 2ab = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = a^2b^2 + 1 \\ (ab)^4 + 2(ab)^2 - 2ab - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = a^2b^2 + 1 \\ (ab-1)[(ab)^3 + (ab)^2 + 3ab + 1] = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = a^2b^2 + 1 \\ ab = 1 (do ab > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 1 \Leftrightarrow x = 4$

Câu 4. (3,0 điểm) Tìm m để phương trình $x^2 - (m+1)x + m + 3 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh AB, AC của tam giác ABC vuông tại A và có $BC = 5$

Ta có $x^2 - (m+1)x + m + 3 = 0(1)$

Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh AB, AC nên $x_1, x_2 > 0$

(1) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(m+3) \geq 0 \\ S = m+1 > 0 \\ P = m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 11 \geq 0 \\ m > -1 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1 + 2\sqrt{3}$

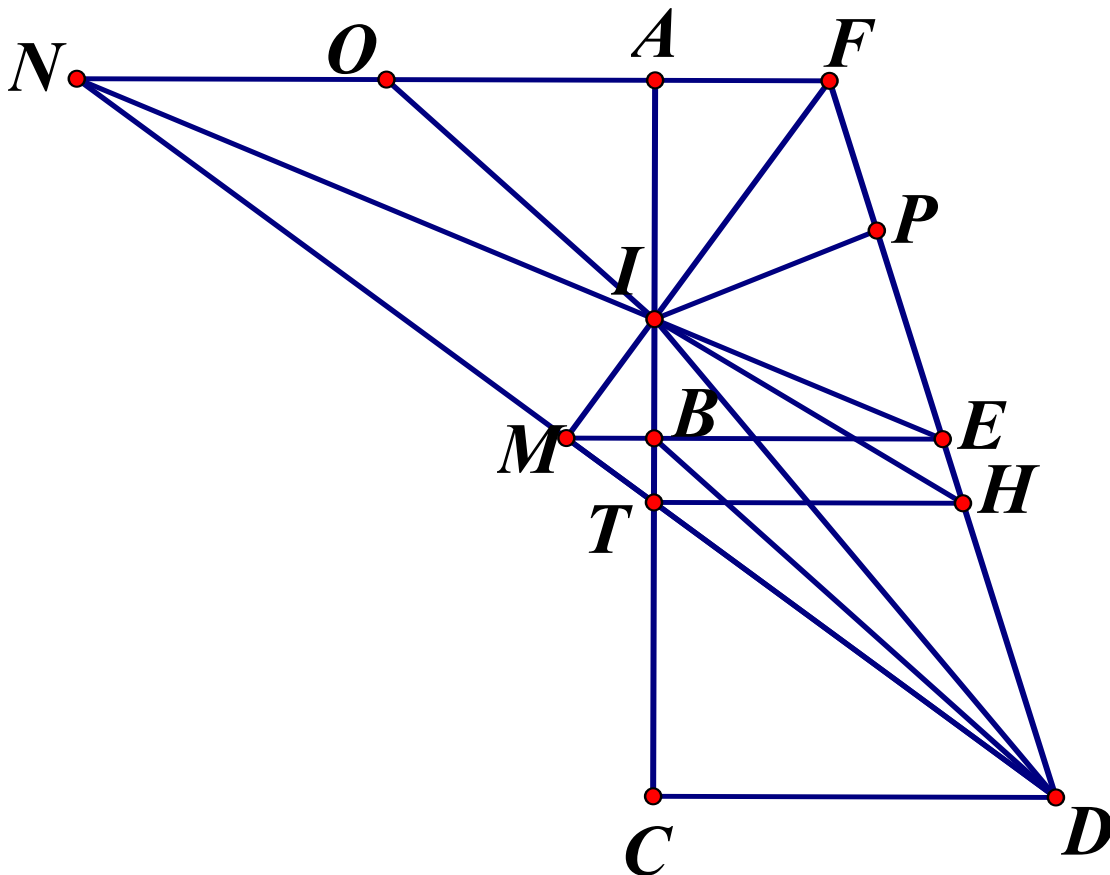
Do x_1, x_2 là độ dài hai cạnh AB, AC của tam giác ABC vuông tại A và $BC = 5$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 2(m+3) = 25 \Leftrightarrow m^2 = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{30}(tm) \\ m = -\sqrt{30}(ktm) \end{cases}$

Vậy $m = \sqrt{30}$

Câu 5. (4,0 điểm) Cho ba đường thẳng cố định a, b, c song song nhau, sao cho b nằm giữa và cách đều a và c . Một đường thẳng d cố định, vuông góc a , lần lượt cắt a, b, c tại A, B, C . Trên đoạn AB lấy điểm I sao cho $IA = 2IB$. Gọi D là một điểm di động trên c . Trên b lấy điểm E sao cho $IE = \frac{1}{2}ID$. Đường thẳng DE cắt a tại F



c) Lấy điểm H trên đoạn ED sao cho $HE = \frac{1}{2}HD$. Chứng minh rằng

$$\angle FIH = 90^\circ$$

Do a, b, c song song nhau, sao cho b nằm giữa và cách đều a và c nên B là trung điểm của AC

Xét hình thang $AFDC$ có $AF \parallel CD \parallel BE$ và B là trung điểm của AC nên E là trung điểm của DF

Mà $HE = \frac{1}{2}HD$ nên $\frac{FH}{FD} = \frac{2}{3}$ (1). Gọi N là giao điểm của IE và AF

$$\text{Do } AN // BE \Rightarrow \frac{IE}{IN} = \frac{IB}{IA} = \frac{1}{2}$$

Xét tam giác FDN có NE là đường trung tuyến và $\frac{IE}{IN} = \frac{1}{2}$ nên I là trọng tâm

$$\Delta FDN. \text{ Do vậy } \frac{FI}{FM} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } \frac{FH}{FD} = \frac{FI}{FM}, \text{ suy ra } IH // MD \quad (3)$$

Gọi M là giao điểm của FI, ND . suy ra M là trung điểm của DN

$$\text{Do } \frac{IE}{IN} = \frac{1}{2}; \frac{IE}{ID} = \frac{1}{2} \Rightarrow IN = ID, \text{ hay } \Delta IND \text{ cân tại } I, \text{ suy ra } IM \perp ND \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $IH \perp IF$ hay $\angle FIH = 90^\circ$

d) Chứng minh đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

Kẻ $HT // CD$, cắt AC tại T

$$\text{Do } HE = \frac{1}{2}HD \text{ nên } BT = \frac{1}{2}TC, \text{ suy ra } IA = IT$$

Gọi O là giao điểm của IH và NF

$$\text{Do } OF // TH \text{ nên } \frac{IO}{IH} = \frac{IA}{IT} = 1 \text{ hay } IH = IO \quad (5)$$

Kẻ $IP \perp DE$ tại P

$$\text{Xét } \Delta FIO \text{ vuông tại } I \text{ có } IA \text{ là đường cao nên } \frac{1}{IA^2} = \frac{1}{IF^2} + \frac{1}{IO^2} \quad (6)$$

$$\text{Xét tam giác } FIH \text{ vuông tại } I \text{ có } IP \text{ là đường cao nên } \frac{1}{IP^2} = \frac{1}{IF^2} + \frac{1}{IH^2} \quad (7)$$

Từ (5), (6) và (7) suy ra $IP = IA$, không đổi

Vậy đường thẳng DE luôn tiếp xúc với đường tròn

Câu 6. (3,0 điểm) Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa $(x+y)^4 + 5z = 63x$

Tính giá trị biểu thức $Q = x + y + z$

Ta có : $63x = (x + y)^4 + 5z \geq 16x^2y^2 + 5z$

Do đó $63x > 16x^2y^2 \Rightarrow 63 > 16xy^2 \Rightarrow xy^2 \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ y \leq 1 \end{cases}$

Nếu $x = 1, y = 1 \Rightarrow 5z + 16 = 63 \Leftrightarrow z = \frac{47}{5} (ktm)$

Nếu $x = 2, y = 1 \Rightarrow 5z + 81 = 126 \Leftrightarrow z = 9(tm)$

Nếu $x = 3, y = 1$ thì $5z + 256 = 189 \Rightarrow z < 0$

Vậy $Q = 12$