

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{a+\sqrt{a}}{a-1} + \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}\right) \left(\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}\right)$

- a) Rút gọn biểu thức A
- b) Tính giá trị của a khi $A = \frac{1}{4}$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho phương trình $x^2 - 4x + m + 1 = 0(1)$ có với m là tham số

- a) Giải phương trình với $m = 2$
- b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn biểu thức $x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2)$

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình : $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$
- b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy - x - y = 1(1) \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7(2) \end{cases}$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn, $OA = 2R$. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt dây BC tại I . Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC . Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt AB, AC lần lượt tại E, F . Dây BC cắt OE, OF lần lượt tại P, Q

- a) Chứng minh rằng $\angle ABI = 60^\circ$ và tứ giác $OBEQ$ là tứ giác nội tiếp
- b) Chứng minh $EF = 2PQ$
- c) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC sao cho tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 10x^2 + 10y^2 + z^2$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{a+\sqrt{a}}{a-1} + \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}\right) \begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$

c) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \frac{\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{a+\sqrt{a}}{a-1} + \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}\right) \begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix} \\ &= \left[1 + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}-1)}\right] : \left[\frac{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}-1)}\right] \\ &= \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} : \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

d) Tính giá trị của a khi $A = \frac{1}{4}$

$$\text{Khi } A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4\sqrt{a}-4 = \sqrt{a} \Leftrightarrow a = \frac{16}{9} (tm)$$

$$\text{Vậy khi } A = \frac{1}{4} \text{ thì } a = \frac{16}{9}$$

Câu 2. (2,0 điểm) Cho phương trình $x^2 - 4x + m + 1 = 0(1)$ có với m là tham số

c) Giải phương trình với $m = 2$

$$\text{Với } m = 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

d) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn biểu thức $x_1^2 + x_2^2 = 5(x_1 + x_2)$

Ta có : $\Delta' = 4 - (m+1) = -m + 3$. Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì :

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases}$. Khi đó :

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 5(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 5(x_1 + x_2) \\ \Leftrightarrow 16 - 2(m+1) &= 20 \Leftrightarrow -2m = 6 \Leftrightarrow m = -3(tm) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } m = -3$$

Câu 3. (2,0 điểm)**c) Giải phương trình :** $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}=3\sqrt{x}$ Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-4x+1 \geq 0 \end{cases}$. Bình phương hai vế, ta có :

$$2x^2-11x+2+2(x+1)\sqrt{x^2-4x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2+2x+1)+5(x^2-4x+1)+4(x+1)\sqrt{x^2-4x+1}=0$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+1}=a(a \geq 0) \\ \sqrt{x^2-4x+1}=b(b \geq 0) \end{cases}$. Ta có :

$$-a+5b^2-4ab=0 \Leftrightarrow (a+b)(5b-a)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 5b=a \end{cases}$$

$$*) a=-b \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+1}=-\sqrt{x^2-4x+1} \text{ (ktm)}$$

$$*) 5b=a \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+1}=5\sqrt{x^2-4x+1} \Leftrightarrow x^2+2x+1=25(x^2-4x+1)$$

$$\Leftrightarrow 24x^2-102x+24=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{4; \frac{1}{4}\right\}$$

d) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy-x-y=1(1) \\ 4x^3-12x^2+9x=-y^3+6y+7(2) \end{cases}$ Đặt $z=y-1$, hệ phương trình thành :

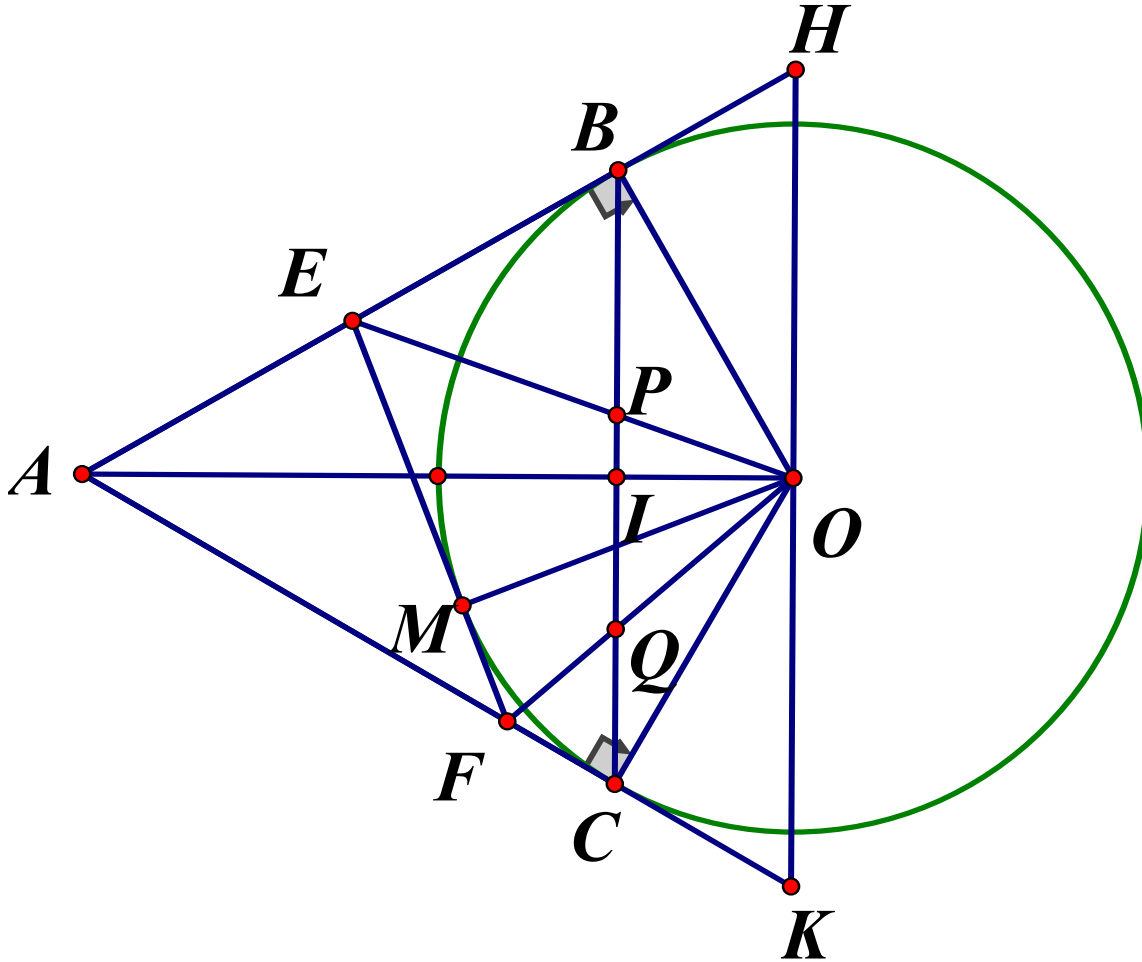
$$\begin{cases} yz=z+2 \\ y^3-3y(z+2)+4z^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz=z+2 \\ y^3-3y^2z+4z^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz=z+2 \\ \begin{cases} y=-z \\ y=2z \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{1+\sqrt{17}}{4}; y=\frac{1+\sqrt{17}}{2}; x=\frac{5+\sqrt{17}}{4} \\ z=\frac{1-\sqrt{17}}{4}; y=\frac{1-\sqrt{17}}{2}; x=\frac{5-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) \in \left\{ \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}; \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right); \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right) \right\}$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn, $OA = 2R$. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt dây BC tại I . Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC . Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt AB, AC lần lượt tại E, F . Dây BC cắt OE, OF lần lượt tại P, Q .



d) Chứng minh rằng $\angle ABI = 60^\circ$ và tứ giác $OBEQ$ là tứ giác nội tiếp

Ta có : $OB = OC = R, AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC hay $BC \perp OA$ tại I . Do đó :

$$\cos \angle ABI = \cos \angle AOB = \frac{OB}{OA} = 0,5 \Rightarrow \angle ABI = 60^\circ. \text{ Mà}$$

$$\angle EOF = \angle MOF + \angle EOM = \frac{\angle MOC + \angle BOM}{2} = \frac{\angle BOC}{2} = \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \angle EOF = \angle BOI$$

Từ đó : $\angle ABI = \angle FOE = 60^\circ \Rightarrow \angle QBE = \angle QOE \Rightarrow OBEQ$ là tứ giác nội tiếp

e) Chứng minh $EF = 2PQ$

Ta có $\angle OQP = \angle OEB = \angle OEF \Rightarrow \Delta OQP \sim \Delta OEF \Rightarrow \frac{PQ}{PE} = \frac{OQ}{OE}$

Mặt khác $\angle OBE = \angle OQE = 180^\circ$ mà $\angle OBE = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle OQE = 90^\circ \Rightarrow \angle OEQ = 90^\circ - \angle EOF = 30^\circ \Rightarrow \sin OEQ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OQ}{OE} = \frac{1}{2} \Rightarrow EF = 2PQ$

f) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ BC sao cho tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất

Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AC lần lượt tại K, H

Vì $\Delta OQP \sim \Delta OEF \Rightarrow \frac{S_{OQP}}{S_{FOE}} = \frac{FE^2}{PQ^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{OPQ} = \frac{S_{FOE}}{4} = \frac{R.FE}{8}$ mà

$\angle K = \angle BOI = 60^\circ \Rightarrow HC = KB = OB \cdot \cot K = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Ta có :

$FE = FM + EM = FC + EB = HF - HC + KE - BK$

$= HF + KE - HC - BK = (HF + KE) - 2HC \geq 2\sqrt{HF \cdot KE} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Mặt khác ta có :

$\Delta HFO \sim \Delta OFE; \Delta KOE \sim \Delta OFE \Rightarrow \Delta HFO \sim \Delta KOE \Rightarrow \frac{FH}{OK} = \frac{HO}{EK}$

$\Rightarrow HF \cdot KE = OK \cdot OH = OK^2 = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow S_{OPQ} = \frac{S_{FOE}}{4} = \frac{R.FE}{8} \geq \frac{R^2 \sqrt{3}}{8}$ khi M nằm chính giữa cung BC

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 10x^2 + 10y^2 + z^2$

Ta có : $4x^2 + 4y^2 \geq 8xy; 16x^2 + z^2 \geq 8zx; 16y^2 + z^2 \geq 8yz$

Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức cùng chiều ta có :

$2S \geq 8(xy + yz + zx) \geq 36 \Rightarrow \text{Min } S = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$