

Đề chính thức

Môn thi: TOÁN

(Đề gồm có 01 trang)

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (6,0 điểm).

- a) Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - \sqrt{x+y} = \sqrt{2y-x^2+2x} \\ (2 - \sqrt{x+y})\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{3x} \end{cases}$$

Câu 2 (3,0 điểm).

- a) Tìm $x \in \mathbf{R}$ sao cho $x + \sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x} - \sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.
- b) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.

Câu 3 (2,0 điểm).

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c \geq 1$ và $a^2 + 4b^2 + c^2 + 2ab + 12 = 3(a + 5b + c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^3}{a + (a+b)^2} + \frac{a^2}{a + c^2}$.

Câu 4 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Trên đường tròn (O) lấy điểm D khác phía A so với đường thẳng BC ($BD > AC$). Qua B kẻ đường thẳng d song song với CD . Đường thẳng d cắt đường thẳng AC tại E , cắt đường tròn (O) tại F (F khác B).

- a) Gọi J là trung điểm của EC . Chứng minh rằng 4 điểm A, F, O, J cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Đường thẳng OE cắt đường thẳng AD tại I . Chứng minh rằng $IBA = BDA$.
- c) Trên tia BD lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại N , đường thẳng BN cắt (O) tại K (K khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Đường thẳng BD cắt các đường thẳng NH, CK lần lượt tại P, Q .

Chứng minh rằng $\frac{1}{PM} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{BM}$.

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho một đa giác lồi có diện tích bằng 2024cm^2 . Chứng minh rằng bao giờ cũng vẽ được trong đa giác đó một tam giác có diện tích không nhỏ hơn 759cm^2 .

- HẾT -

ĐÁP ÁN

Câu 1 a) Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$.

Phương trình đã cho tương đương $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1. $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Trường hợp 2. $x^2 - 2x + 3 = 0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Câu 1b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - \sqrt{x+y} = \sqrt{2y-x^2+2x} & (1) \\ (2 - \sqrt{x+y})\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{3}x & (2) \end{cases}$$

Đặt $v = \sqrt{x+y}$ ($v \geq 0$). Phương trình (1) trở thành $\sqrt{2v^2 - x^2} = 2x - v$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - v \geq 0 \\ 2v^2 - x^2 = (2x - v)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - v \geq 0 \\ 5x^2 - 4xv - v^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - v \geq 0 \\ (5x + v)(x - v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - v \geq 0 \\ \begin{cases} v = -5x \\ v = x \end{cases} \end{cases}$$

Trường hợp 1. $\begin{cases} 2x - v \geq 0 \\ v = -5x \end{cases}$. $v \geq 0, v = -5x \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow 2x - v \leq 0 \Rightarrow x = v = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Thay vào (2) không thỏa mãn.

Trường hợp 2. $\begin{cases} 2x - v \geq 0 \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+y} = x$. Thay vào (2) ta được phương trình

$$(2-x)\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{3}x \Rightarrow (2-x)^2(x^2+4) = 12x^2 \quad (0 < x < 2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4) = 12x^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{4}{x} - 4\right)\left(x + \frac{4}{x}\right) = 12.$$

Đặt $t = x + \frac{4}{x}$ ($t \geq 4$). Phương trình trở thành $t(t - 4) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}.$

Với $t = 6 \Rightarrow x + \frac{4}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{5} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 3 + \sqrt{5} \text{ (loại)} \end{cases}.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3 - \sqrt{5}; 11 - 5\sqrt{5})$.

Câu 2a. Tìm $x \in \mathbf{R}$ sao cho $x + \sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x} - \sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.

Đặt $a = x + \sqrt{2024} \Rightarrow x = a - \sqrt{2024}$; $b = \frac{1}{x} - \sqrt{2024} \Rightarrow \frac{1}{x} = b + \sqrt{2024}$ với $a, b \in \mathbf{Z}$

$$x \cdot \frac{1}{x} = (a - \sqrt{2024})(b + \sqrt{2024}) \Leftrightarrow 1 = ab - 2024 + \sqrt{2024}(a - b)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{506}(a - b) = 2025 - ab \in \mathbf{Z} \Rightarrow a - b = 0$$

$$\Rightarrow 2025 - ab = 0 \text{ và } a = b$$

$$\Rightarrow a = b = \pm 45$$

$$\Rightarrow x = \pm 45 - \sqrt{2024}. \text{ Thử lại ta có giá trị của } x \text{ cần tìm là } x = \pm 45 - \sqrt{2024}.$$

Câu 2b. Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.

Vì $2a$ là số lập phương nên $2a = n^3$ ($n \in \mathbf{N}^*$)

$$\Rightarrow n \vdots 2 \Rightarrow n = 2x, x \in \mathbf{N}^* \Rightarrow 2a = 8x^3 \Rightarrow a = 4x^3 \quad (1)$$

Vì $5a$ là số chính phương nên $5a = k^2$ ($k \in \mathbf{N}^*$) $\Rightarrow k \vdots 5 \Rightarrow k = 5y$ ($y \in \mathbf{N}^*$)

$$\Rightarrow 5a = 25y^2 \Rightarrow a = 5y^2 \quad (2)$$

$$(1), \quad (2) \quad \Rightarrow 4x^3 = 5y^2 \Rightarrow 4x^3 \vdots 5 \Rightarrow x \vdots 5 \Rightarrow x = 5m \quad (m \in \mathbf{N}^*) \Rightarrow a = 5y^2 = 4.125.m^3 = 500m^3$$

$$\Rightarrow 2a = (10m)^3; 5a = 50^2 m^3.$$

Vì a nhỏ nhất và $50^2 m^3$ là số chính phương nên $m = 1 \Rightarrow a = 500$ (thỏa mãn).

Vậy $a = 500$.

Câu 3. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c \geq 1$ và $a^2 + 4b^2 + c^2 + 2ab + 12 = 3(a + 5b + c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^3}{a + (a+b)^2} + \frac{a^2}{a + c^2}$.

$$a^2 + 4b^2 + c^2 + 2ab + 12 = 3(a + 5b + c) \Rightarrow (a+b)^2 + c^2 = -3(b^2 + 4) + 3(a + 5b + c)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 + c^2 \leq -12b + 3(a + 5b + c) = 3(a + b + c).$$

Kết hợp $a + b + c \leq \sqrt{2[(a+b)^2 + c^2]}$ suy ra

$$(a+b)^2 + c^2 \leq 3\sqrt{2[(a+b)^2 + c^2]} \Rightarrow (a+b)^2 + c^2 \leq 18 \quad (1).$$

$$+) \text{ Vì } a \geq 1 \text{ nên } \begin{cases} a^3 \geq a \\ a^2 \geq a \end{cases} \Rightarrow T \geq \frac{a}{a + (a+b)^2} + \frac{a}{a + c^2} = a \left(\frac{1}{a + (a+b)^2} + \frac{1}{a + c^2} \right)$$

$$\geq \frac{4a}{a + (a+b)^2 + a + c^2} \geq \frac{4a}{2a + 18} = 2 \left(1 - \frac{9}{a+9} \right) \geq \frac{1}{5}.$$

$$\min T = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 4, a+b = c \\ a + (a+b)^2 = a + c^2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

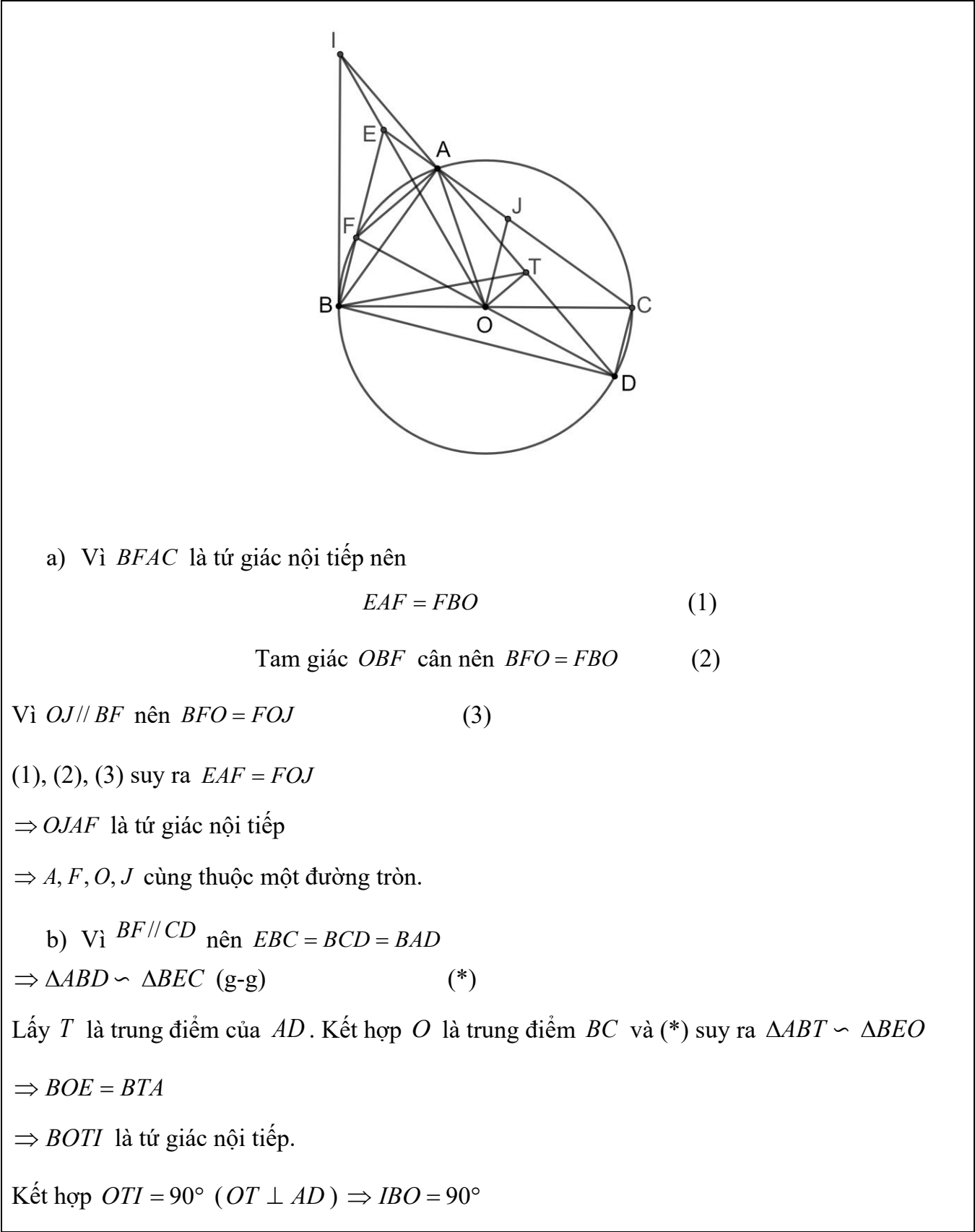
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Trên đường tròn (O) lấy điểm D khác phía A so với đường thẳng BC ($BD > AC$). Qua B kẻ đường thẳng d song song với CD . Đường thẳng d cắt đường thẳng AC tại E , cắt đường tròn (O) tại F (F khác B).

a) Gọi J là trung điểm của EC . Chứng minh rằng 4 điểm A, F, O, J cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường thẳng OE cắt đường thẳng AD tại I . Chứng minh rằng $IBA = BDA$.

c) Trên tia BD lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại N , đường thẳng BN cắt (O) tại K (K khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Đường thẳng BD cắt các đường thẳng NH, CK lần lượt tại P, Q .

Chứng minh rằng $\frac{1}{PM} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{BM}$.



a) Vì $BFAC$ là tứ giác nội tiếp nên

$$EAF = FBO \quad (1)$$

Tam giác OBF cân nên $BFO = FBO$ (2)

Vì $OJ \parallel BF$ nên $BFO = FOJ$ (3)

(1), (2), (3) suy ra $EAF = FOJ$

$\Rightarrow OJAF$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow A, F, O, J$ cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì $BF \parallel CD$ nên $\angle EBC = \angle BCD = \angle BAD$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle BEC \text{ (g-g)} \quad (*)$$

Lấy T là trung điểm của AD . Kết hợp O là trung điểm BC và (*) suy ra $\triangle ABT \sim \triangle BEO$

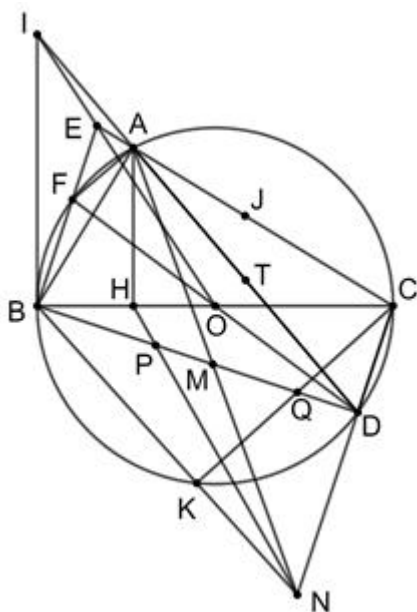
$$\Rightarrow BOE = BTA$$

$\Rightarrow BOTI$ là tứ giác nội tiếp.

Kết hợp $OTI = 90^\circ$ ($OT \perp AD$) $\Rightarrow IBO = 90^\circ$

nên BI là tiếp tuyến của (O) .

Suy ra $IBA = BDA$.



c) Ta có $BM^2 = BA^2 = BH.BC$ (4)

Tam giác BAM cân tại B nên

$$BAM = BMA = NMD \quad (5)$$

$$BAM + MAC = NMD + MND = 90^\circ \quad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow MAC = MNC \Rightarrow \triangle CAN \text{ cân tại } C$$

$$\Rightarrow CA = CN \Rightarrow CN^2 = CA^2 = CH.CB$$

$$\Rightarrow \frac{CN}{CH} = \frac{CB}{CN} \Rightarrow \triangle CNH \sim \triangle CBN \Rightarrow CHN = CNB \quad (7)$$

$$\text{Mà } CNB = CQD \text{ suy ra } CHPQ \text{ là tứ giác nội tiếp} \quad (8)$$

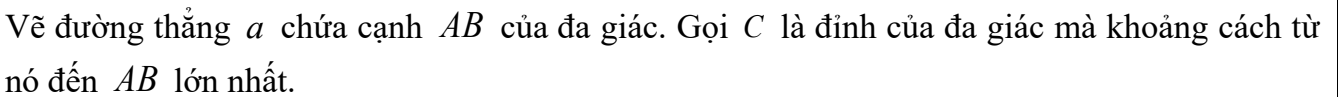
$$(7), (8) \Rightarrow BH.BC = BP.BQ \quad (9)$$

Từ (4), (9) suy ra

$$BM^2 = BP.BQ = (BM - PM)(BM + MQ) = BM^2 + BM.MQ - PM.BM - PM.MQ$$

$$\text{Suy ra } BM.MQ = PM.BM + PM.MQ \Rightarrow \frac{1}{PM} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{BM}$$

Cho một đa giác lồi có diện tích bằng 2024cm^2 . Chứng minh rằng bao giờ cũng vẽ được trong đa giác đó một tam giác có diện tích không nhỏ hơn 759cm^2 .



Vẽ d, d_1, d_2 là các đường thẳng song song với a sao cho d cách đều a và c ; d_1 cách đều c và d ; d_2 cách đều a và d .

Đường thẳng d_1 cắt biên của đa giác tại D và E . Kéo dài hai cạnh của đa giác chứa D và E cắt 2 đường thẳng c và d tạo thành hình thang hoặc tam giác có diện tích $S_1 = ED.2h$.

Đường thẳng d_2 cắt biên của đa giác tại M, N . Kéo dài hai cạnh của đa giác chứa M, N cắt hai đường thẳng a và d tạo thành hình thang có diện tích $S_7 = MN.2h$.

$$\Rightarrow S_1 + S_2 \geq 2024 \Rightarrow (ED + MN).2h \geq 2024.$$

Vì $S_{CMN} + S_{ADE} \geq 1518$ nên một trong hai tam giác CMN hoặc ADE có diện tích lớn hơn hoặc bằng 759cm^2 .