

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐỒNG NAI**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 – 2021**

Môn : Toán chuyên

Thời gian làm bài: 150 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,25 điểm)

- 1) Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn $6x + 7y = 8$ và $|9x - 10y| < 200$
- 2) Tìm các tham số nguyên n để phương trình $x^2 + nx + n = 0$ có nghiệm nguyên
- 3) Cho a là các số thực thỏa mãn $a \geq 0$ và $a \neq 9$

Rút gọn biểu thức $P = \frac{27 - a\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 3} - \frac{27(a\sqrt{a} + 125)}{a\sqrt{a} - 2a + 10\sqrt{a} + 75}$. Tìm a để P đạt giá trị lớn nhất

Câu 2. (1,5 điểm)

- 1) Giải phương trình $x\sqrt[3]{35 - x^3} \cdot (x + \sqrt[3]{35 - x^3}) = 30$
- 2) Tìm các tham số thực m để phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $M = \frac{x_1x_2 - x_1 - x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 3. (1,5 điểm) Giải hai hệ phương trình sau :

$$1) \begin{cases} 6x^3 + 2x^2y = x + y \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 = y^3 + 36 \\ y^2 = x^3 + 36 \end{cases}$$

Câu 4. (2 điểm)

- 1) Cho $\frac{-1}{3} < a, b, c \in \mathbb{Q}$. Chứng minh $\frac{1 + a^2}{1 + 3b + c^2} + \frac{1 + b^2}{1 + 3c + a^2} + \frac{1 + c^2}{1 + 3a + b^2} \geq \frac{6}{5}$
- 2) Trong mặt phẳng cho 1889 điểm thỏa mãn với 3 điểm bất kỳ tạo thành 3 đỉnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1. Chứng minh trong các điểm đã cho tồn tại 237 điểm cùng nằm bên trong hoặc trên cạnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{2}$
- 3) Có bao nhiêu cách bỏ 5 cây bút khác màu gồm xanh, đen, tím, đỏ, hồng vào 5 hộp đựng bút khác màu gồm xanh, đen, tím, đỏ, hồng sao cho mỗi hộp chỉ có một bút và màu bút khác với màu hộp.

Câu 5. (2,75 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H , biết $AB < AC$. Gọi L là giao điểm của đường thẳng BC với tiếp tuyến tại A của (O) . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng BC, EF

- a) Chứng minh tứ giác $ALMO$ nội tiếp đường tròn. Gọi D là giao điểm của (O) với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ALMO, D$ khác A . Chứng minh LD là tiếp tuyến của (O)
- b) Chứng minh MK vuông góc với AK , suy ra $KH \perp AM$
- c) Chứng minh rằng ba điểm A, N, D thẳng hàng.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1.1) Tìm các số nguyên x, y

$$\text{Giả sử có } x, y \in \mathbb{Z} \text{ thỏa mãn } 6x + 7y = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 7t \\ y = -4 - 6t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

$$(\text{vì } 6x + 7y = 6(6 + 7t) + 7(-4 - 6t) = 8, \forall t \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy } |9x - 10y| < 200 \Leftrightarrow -200 < 9(6 + 7t) - 10(-4 - 6t) < 200$$

$$\Leftrightarrow -200 < 123t + 94 < 200 \Leftrightarrow \frac{-98}{41} < t < \frac{106}{123} \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 0 (do t \in \mathbb{Z})$$

Do đó chỉ có $(x; y) \in \{(-8; 8); (-1; 2); (6; -4)\}$ thỏa mãn bài toán.

1.2) Tìm các số nguyên n

$$\text{Phương trình } x^2 + nx + n = 0(1) \text{ có nghiệm} \Rightarrow \Delta = n^2 - 4n \geq 0$$

Giả sử (1) có nghiệm nguyên $\Rightarrow n^2 - 4n$ là số chính phương (vì nếu ngược lại thì (1) có

nghiệm $\frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4n}}{2}$ là số vô tỷ, vô lý)

$$\text{Hay } n^2 - 4n = k^2(2), k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (n - 2)^2 = k^2 + 4 \Leftrightarrow (n - 2 - k)(n - 2 + k) = 4(3)$$

Mà (2) $\Leftrightarrow n^2 - k^2 = 4n \Rightarrow (n^2 - k^2) : 2 \Rightarrow n$ và k cùng chẵn hoặc cùng lẻ

$\Leftrightarrow n - 2 - k$ và $n - 2 + k$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ

$$\text{Vậy (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} n - 2 - k = 2 \\ n - 2 + k = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} n - 2 - k = -2 \\ n - 2 + k = -2 \end{cases}$$

$$\text{Giải 2 hệ trên ta được } \begin{cases} n = 0 \\ n = 4 \end{cases} (tm)$$

$$\text{Vậy } n = 0, n = 4$$

$$\begin{aligned} 1.3) P &= \frac{27 - a\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 3} - \frac{27(a\sqrt{a} + 125)}{a\sqrt{a} - 2a + 10\sqrt{a} + 75} = \frac{27 - a\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 3} - \frac{27(\sqrt{a} + 5)(a - 5\sqrt{a} + 25)}{(\sqrt{a} + 3)(a - 5\sqrt{a} + 25)} \\ &= \frac{27 - a\sqrt{a} - 27\sqrt{a} - 135}{\sqrt{a} + 3} = \frac{-(\sqrt{a} + 3)(a - 3\sqrt{a} + 36)}{\sqrt{a} + 3} = -a + 3\sqrt{a} - 36 \end{aligned}$$

Vậy $P = -a + 3\sqrt{a} - 36$, với $0 \leq a \neq 9$

Tìm a

$$P = -a + 3\sqrt{a} - 36 = -\left(\sqrt{a} - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{135}{4} \leq -\frac{135}{4} (\forall a \geq 0; a \neq 9)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4} (tm)$$

$$\text{Vậy } \min P = -\frac{135}{4} \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}$$

Câu 2.

$$1) \text{ Giải phương trình: } x\sqrt[3]{35-x^3} \cdot (x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt[3]{35-x^3} \Leftrightarrow x^3 + y^3 = 35. \text{ Có } (1) \Leftrightarrow xy(x+y) = 30$$

$$\text{Vậy có } \begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ (x+y)^3 - 3(x+y)xy = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ (x+y)^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{2; 3\}$$

2) Tìm m

$x^2 - (2m+1)x + m - 1 = 0 \quad (1) \Delta = (2m+1)^2 - 4m + 4 = 4m^2 + 5 > 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Áp dụng định lý Vi - et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 x_2 = m-1 \end{cases}. \text{ Vậy}$$

$$M = \frac{x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 3}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2} = \frac{m-1 - (2m+1) + 3}{(2m+1)^2 - 2(m-1)} = \frac{1-m}{4m^2 + 2m + 3}$$

$$\text{Có } 4m^2 + 2m + 3 = (m+1)^2 + 3m^2 + 2 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1-m}{4m^2 + 2m + 3} + \frac{1}{22} = \frac{4m^2 - 20m + 25}{22(4m^2 + 2m + 3)} = \frac{(2m-5)^2}{22(4m^2 + 2m + 3)} \geq 0 \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy } \min M = -\frac{1}{22} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

Câu 3.**3.1 Giải hệ phương trình**

$$\begin{cases} 6x^3 + 2x^2y = x + y \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6x^3 + 2x^2y \quad (1) \\ x^2 - 6xy - y^2 = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) nhân (2) vế theo vế ta có: $(x + y)(x^2 - 6xy - y^2) = 6(6x^3 + 2x^2y)$

$$\Leftrightarrow 35x^3 + 17x^2y + 7xy^2 + y^3 = 0 \quad (3)$$

Vì $x = 0$ không thỏa mãn (1) nên $x \neq 0$, đặt $y = tx, t \in \mathbb{Q}$

$$(3) \Leftrightarrow 35x^3 + 17tx^3 + 7t^2x^3 + t^3x^3 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 7t^2 + 17t + 35 = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (t + 5)(t^2 + 2t + 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t^2 + 2t + 7 = 0 \quad (VN) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -5x \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -5 \\ x = -1 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y) = \{(1; -5); (-1; 5)\}$

3.2 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = y^3 + 36 \quad (1) \\ y^2 = x^3 + 36 \quad (2) \end{cases} \quad (I). \text{ Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được: } x^2 - y^2 = -(x^3 - y^3)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 + xy + x + y = 0 \quad (VN) \end{cases}$$

$$x = y \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 4x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = -3 \\ x^2 - 4x + 12 = 0 \quad (VN) \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (-3; -3)$

Câu 4.**4.1) Chứng minh bất đẳng thức**

Ta có : $a, b, c > -\frac{1}{3}$

$$\text{Cần chứng minh : } \frac{1+a^2}{1+3b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+3c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+3a+b^2} \geq \frac{6}{5} \quad (1)$$

Thật vậy, $(b-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{1+b^2}{2}, \forall b \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow 0 < 1+3b+c^2 \leq 1 + \frac{3(1+b^2)}{2} + c^2 = \frac{5+3b^2+2c^2}{2}, \forall b > -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1+a^2}{1+3b+c^2} \geq \frac{2(1+a^2)}{5+3b+2c^2} (2), \forall b > -\frac{1}{3}$$

Đặt $m=1+a^2, n=1+b^2, k=1+c^2 (m, n, k \geq 1)$

Từ (2) có: $\frac{1+a^2}{1+3b+c^2} \geq \frac{2m}{3n+2k}$

Tương tự: $\frac{1+b^2}{1+3c+a^2} \geq \frac{2n}{3k+2m}$ và $\frac{1+c^2}{1+3a+b^2} \geq \frac{2k}{3m+2n}$. Từ đó:

$$\frac{1+a^2}{1+3b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+3c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+3a+b^2} \geq \frac{2m}{3n+2k} + \frac{2n}{3k+2m} + \frac{2k}{3m+2n}$$

Đề có (1) cần chứng minh $\frac{m}{3n+2k} + \frac{n}{3k+2m} + \frac{k}{3m+2n} \geq \frac{3}{5} (3)$

Bổ đề: $\frac{u^2}{x} + \frac{v^2}{t} \geq \frac{(u+v)^2}{x+t} (4)$ (với $u, v, x, t \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $x, t > 0$)

$(4) \Leftrightarrow (u^2t + v^2x)(x+t) \geq xt(u+v)^2 \geq 0$ (đúng) nên (4) đúng

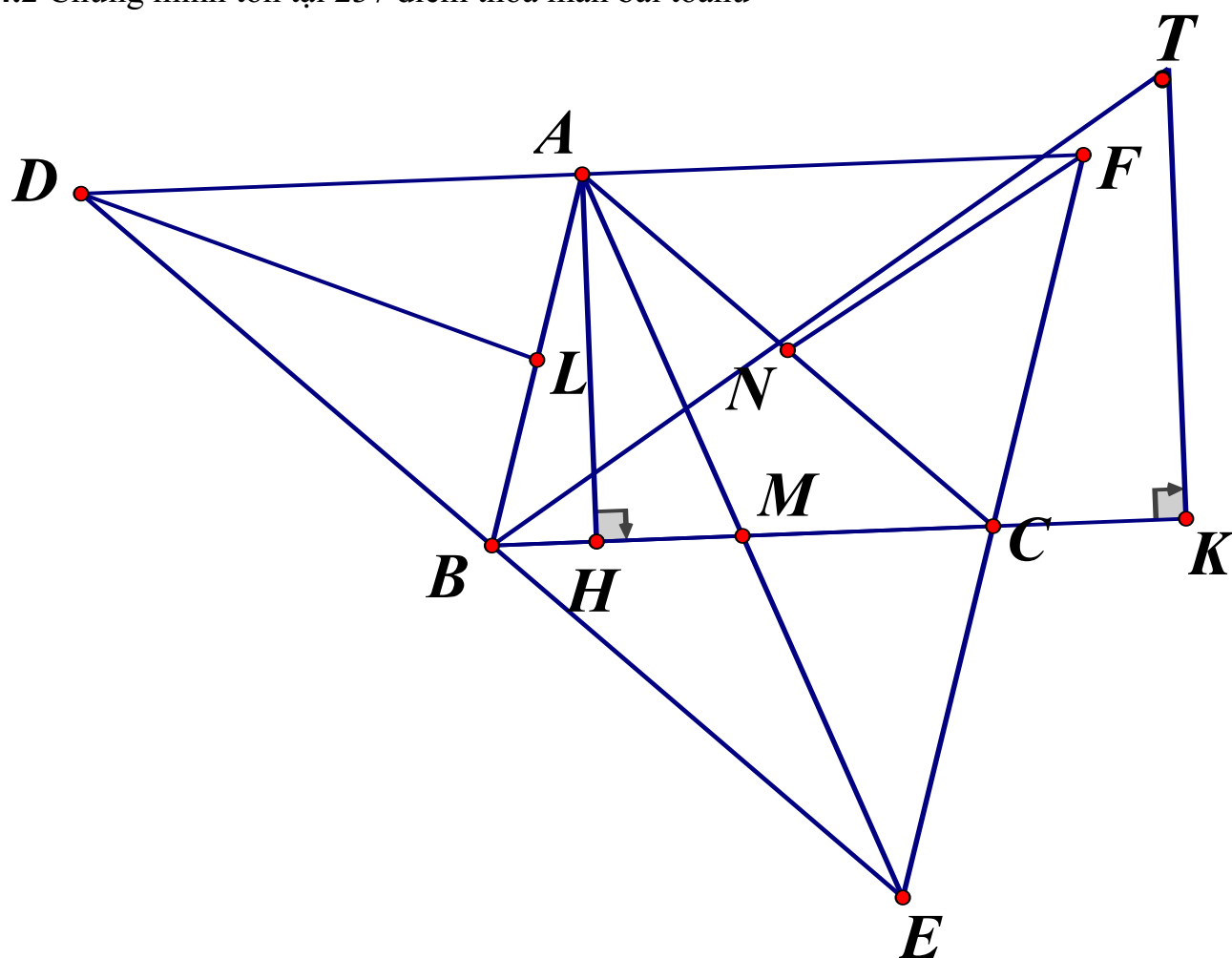
$$\begin{aligned} \text{Vậy } \frac{m}{3n+2k} + \frac{n}{3k+2m} + \frac{k}{3m+2n} &= \frac{m^2}{3mn+2km} + \frac{n^2}{3nk+2mn} + \frac{k^2}{3km+2nk} \\ &\geq \frac{(m+n)^2}{3mn+2km+3nk+2mn} + \frac{k^2}{3km+2nk} \geq \frac{(m+n+k)^2}{5(mn+nk+km)} \geq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$(\text{vì } (m+n+k)^2 - 3(mn+nk+km) = \frac{1}{2}[(m-n)^2 + (n-k)^2 + (k-m)^2] \geq 0)$$

Nên $(m+n+k)^2 \geq 3(mn+nk+km) \forall m, n, k \in \mathbb{Q}$

Bất đẳng thức (3) đúng vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

4.2 Chứng minh tồn tại 237 điểm thỏa mãn bài toán



Gọi P là tập hợp 1889 điểm đã cho. Tồn tại tam giác có diện tích lớn nhất trong các tam giác có 3 đỉnh thuộc P gọi là $\triangle ABC$ có diện tích $S < 1$; Gọi a, b, c lần lượt là 3 đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng song song với BC, CA, AB . Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của a và b , b và c , c và a .

Giả sử có điểm $T \in P$ nằm bên ngoài tam giác DEF

- Nếu T thuộc nửa mặt phẳng bờ DF không chứa B

$$\text{Vẽ } TK \perp BC, AH \perp BC (H, K \in BC) \Rightarrow TK > AH \Rightarrow \frac{TK \cdot BC}{2} > \frac{AH \cdot BC}{2}$$

$\Rightarrow \triangle TBC$ có diện tích lớn hơn S , vô lý

Tương tự nếu T thuộc nửa mặt phẳng bờ DE không chứa C hoặc nửa mặt phẳng bờ EF không chứa A thì vô lý

Vậy 1889 điểm đã cho không nằm bên ngoài $\triangle DEF$

$ADBC$ là hình bình hành (vì $a \parallel BC, b \parallel AC$) $\Rightarrow BC = AD$ và $AC = BD \Rightarrow \triangle ABC = \triangle BAD (c.c.c)$

Tương tự $\triangle ABC = \triangle ECB = \triangle CFA$

Gọi M, N, L lần lượt là trung điểm BC, CA, AB

Tương tự $\triangle DEF$ chia thành 8 tam giác $\triangle ABM, \triangle ACM, \triangle DAL, \triangle DBL, \triangle EBM, \triangle ECM, \triangle FAN, \triangle FCN$ (1) có diện tích bằng nhau gọi là $S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}S < \frac{1}{2}$

Theo nguyên lý Dirichlet, trong 8 tam giác ở (1) tồn tại 1 tam giác có ít nhất

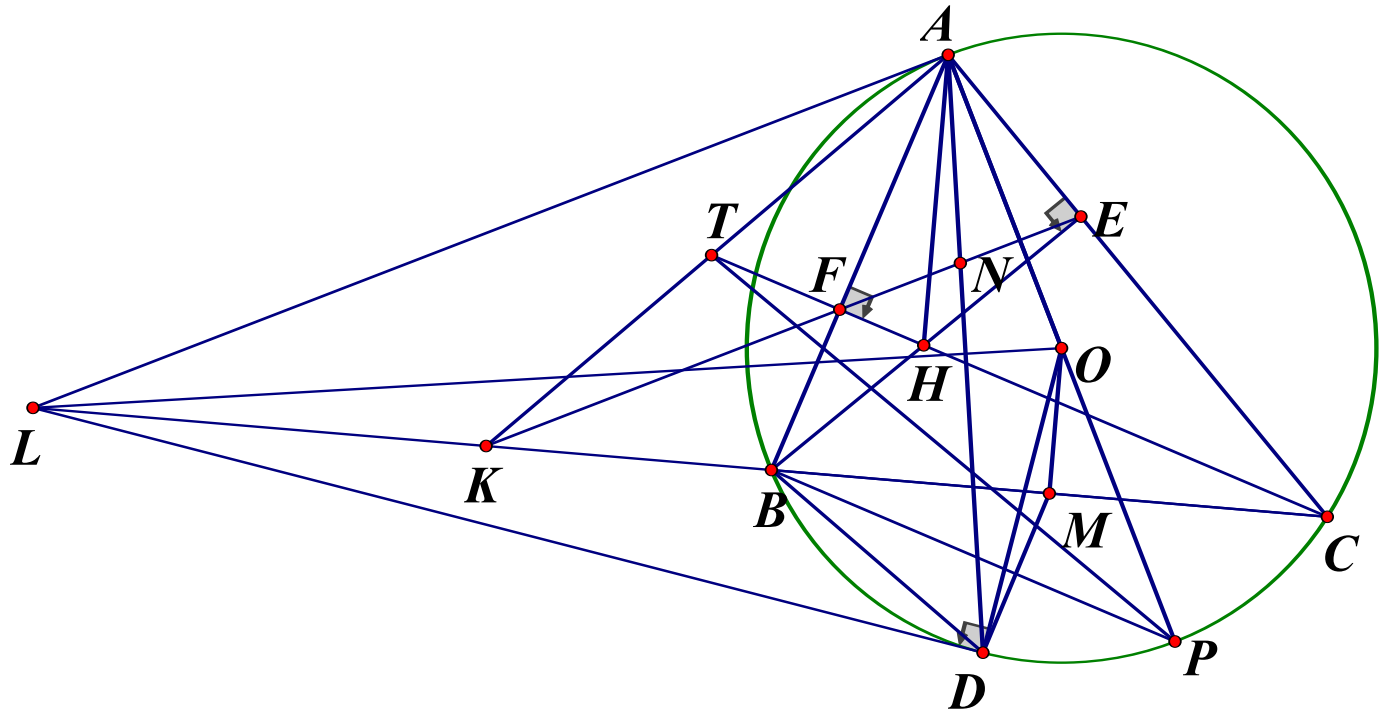
$\left[\frac{1889-1}{8} \right] + 1 = 237$ điểm đã cho nằm bên trong hoặc trên cạnh.

4.3 Tính số cách bỏ 5 bút vào 5 hộp

- Để bỏ 5 cây bút vào 5 hộp đã cho, mỗi hộp chỉ có một bút cần thực hiện liên tiếp các bước bỏ bút vào hộp màu xanh có 5 cách, hộp màu đen có 4 cách (trừ bút đã bỏ hộp màu xanh), tương tự hộp màu tím, đỏ, hồng có 3, 2, 1 cách. Vậy có $5.4.3.2.1 = 120$ (cách)
- Tương tự để bỏ 5 cây bút vào 5 hộp đã cho, mỗi hộp chỉ có một bút mà có 1 hộp đựng bút cùng màu, 4 hộp còn lại đựng 4 bút còn lại thì có $1.4.3.2.1 = 24$ (cách). Có 5 trường hợp
- Tương tự để bỏ 5 cây bút vào 5 hộp đã cho, mỗi hộp chỉ có một bút mà có 2 hộp với mỗi hộp đựng 3 bút cùng màu, 3 hộp còn lại đựng 3 bút còn lại thì có 6 cách. Có 10 trường hợp
- Tương tự để bỏ 5 cây bút vào 5 hộp đã cho, mỗi hộp chỉ có 1 bút mà lần lượt có 3, 4, 5 hộp với mỗi hộp đựng bút cùng màu; các hộp còn lại đựng các hộp bút còn lại thì có 2, 1, 1 (cách). Tương ứng có 10, 5, 1 trường hợp (liệt kê)

Vậy số cách bỏ bút thỏa mãn là : $120 - (5.24 - 10.6 + 10.2 - 5.1 + 1) = 44$ (cách)

Câu 5.



a) Chứng minh $ALMO$ nội tiếp

Vì M là trung điểm của dây BC của $(O) \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow \widehat{OMB} = 90^\circ$ hay $\widehat{OML} = 90^\circ$

Mặt khác $OA \perp AL$ (vì AL là tiếp tuyến của (O) tại A) hay $\widehat{OAL} = 90^\circ$

Vậy $\widehat{OML} + \widehat{OAL} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Do đó tứ giác $ALMO$ nội tiếp đường tròn đường kính OL (chứng minh trên) nên $\widehat{ODL} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính OL) $\Rightarrow OD \perp LD$

Vậy LD là tiếp tuyến của (O) tại D

b) Chứng minh $MH \perp AK$

Có $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (vì BE là đường cao của $\triangle ABC$). Tương tự $\widehat{BFC} = 90^\circ$

Vậy $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (M) đường kính BC (tương tự tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn (I) đường kính AH , với I là trung điểm của AH)

$\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BCF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF của (M))

Hay $\widehat{KEB} = \widehat{KCF}$ mà $\widehat{EKB} = \widehat{CKF}$ (góc chung)

Vậy $\triangle KEB \sim \triangle KCF (g.g) \Rightarrow \frac{KE}{KC} = \frac{KB}{KF} \Leftrightarrow KB.KC = KE.KF$

Gọi T là giao điểm của AK với (O) khác A . Tương tự $KT.KA = KB.KC$

Từ đó $KE.KF = KT.KA \Rightarrow \frac{KE}{KA} = \frac{KT}{KF}$ Mà $\widehat{EKT} = \widehat{AKF}$ (góc chung)

Vậy $\triangle EKT \sim \triangle AKF (c.g.c) \Rightarrow \widehat{KET} = \widehat{KAF}$ hay $\widehat{FET} = \widehat{FAT}$

Mà hai điểm E và A nằm cùng phía đối với đường thẳng TF nên tứ giác $AEFT$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow T \in (I) \Rightarrow \widehat{HTA} = 90^\circ \Rightarrow HT \perp KA$

Vẽ đường kính AP của $(O) \Rightarrow \widehat{ABP} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))
 $\Rightarrow BP \perp AB$

Mà $CF \perp AB$ (vì CF là đường cao của $\triangle ABC$) hay $CH \perp AB$

Vậy $BP \parallel CH$. Tương tự $CP \parallel BH$. Từ đó $HBPC$ là hình bình hành
 $\Rightarrow BC, HP$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn

Mà M là trung điểm BC (gt) $\Rightarrow M$ là trung điểm HP

Mặt khác $\widehat{PTA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow PT \perp KA$

Vậy 4 điểm P, M, H, T thẳng hàng. Do đó $MH \perp KA$

Chứng minh $KH \perp AM$

Ta có $MH \perp KA$ (cmt) $\Rightarrow AH \perp BC$ (vì H là trực tâm của $\triangle ABC$) $\Rightarrow AH \perp KM$

Vậy H là trực tâm của $\triangle AKM \Rightarrow KH \perp AM$

c) Chứng minh A, N, D thẳng hàng

Vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (cmt)

$\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{FBC}$ (do cùng bù với $\widehat{CEF}$) hay $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{EAF} = \widehat{BAC}$ (góc chung)

Vậy $\triangle AEF \sim \triangle ABC (g.g) \Rightarrow \frac{EA}{BA} = \frac{EF}{BC} = \frac{2EN}{2BM}$ hay $\frac{EA}{BA} = \frac{EN}{BM}$

Mà $\widehat{AEN} = \widehat{ABM}$ (do $\widehat{AEF} = \widehat{FBC}$). Vậy $\triangle AEN \sim \triangle ABM (c.g.c) \Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{BAM}$ (1)

Mặt khác $\widehat{CAP} = \widehat{BAH}$ (2) (vì $\widehat{CAP}$ phụ với $\widehat{APC}$, $\widehat{BAH}$ phụ với $\widehat{ABQ}$, với Q là giao điểm của AH và BC , mà $\widehat{ABQ} = \widehat{ABC} = \widehat{APC}$ (do hai góc nội tiếp cùng chắn một cung của (O)))

Lấy (1) trừ (2) về theo về có $\widehat{OAN} = \widehat{HAM}$

Lại có $\widehat{HAM} = \widehat{OMA}$ (hai góc so le trong, vì $OM \parallel AH$)

$\widehat{OMA} = \widehat{ODA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung của đường tròn đường kính OL)

Mà $\widehat{ODA} = \widehat{OAD}$ ($\triangle OAD$ cân tại O do $OA = OD$, bán kính (O))

Vậy $\widehat{OAN} = \widehat{OAD}$. Do đó ba điểm A, N, D thẳng hàng.