

Câu 1. (3,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n không chia hết cho 5 thì $n^4 - 1$ chia hết cho 5.
b) Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c, d, e thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = abcde$.
c) Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a(ab+1):a^2+b$ và $b(ab+1):b^2-a$.

Câu 2. (7,0 điểm)

- a) Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12$.
b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + x - 2y = 0 \\ x^2 + 1 = 4y \end{cases}$.

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2}$.

Câu 4. (8,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định (BC khác đường kính). Điểm A thuộc cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, AB lần lượt tại D, E . Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là M ; BM cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là Q ; BI cắt DE tại P .

- a) Chứng minh tứ giác $IPQM$ nội tiếp.
b) Chứng minh $\widehat{BME} = \widehat{DMP}$.
c) Đường tròn đi qua C tiếp xúc với AI tại I cắt BC tại H và cắt (O) tại điểm thứ hai là K . Chứng minh khi A di động trên (O) thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (1,0 điểm)

Trong một hoạt động ngoại khóa có 20 giáo viên và 80 học sinh đến từ nhiều nơi tham gia. Biết rằng mỗi giáo viên quen với ít nhất 65 người và mỗi học sinh quen với tối đa 12 người (Quan hệ quen được xem là có tính 2 chiều: Người A quen người B thì người B cũng quen người A). Ban tổ chức xếp họ thành 41 nhóm. Hỏi ban tổ chức có thể xếp sao cho nhóm nào cũng có 2 người quen nhau không? Vì sao?

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TỈNH NGHỆ AN 2021 – 2022

A1K49 - THPT Chuyên Phan Bội Châu

NGÀY 21 THÁNG 3 NĂM 2022

Câu 1.

- a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n không chia hết cho 5 thì $n^4 - 1$ chia hết cho 5.
b) Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c, d, e thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = abcde$. (1)
c) Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^2 + b \mid a(ab + 1)$ và $b^2 - a \mid b(ab + 1)$.

✎ Lời giải.

a) Ta có

$$n^4 - 1 = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) = (n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2) + 5(n - 1)(n + 1).$$

Vì $n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$ là 5 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 5. Mà n không chia hết cho 5 nên $5 \mid (n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$. Từ đây ta có $5 \mid n^4 - 1$.

b) Theo câu a) với p là một số nguyên tố khác 5 thì $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

Gọi X số các số bằng 5 trong các số a, b, c, d, e . Ta xét các trường hợp sau:

- ✓ Nếu $X = 0$ thì $VT_{(1)} \equiv 1 + 1 + \dots + 1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod{5}$, còn $VP_{(1)}$ không chia hết cho 5, mâu thuẫn.
- ✓ Nếu $X = 5$ thì $a = b = c = d = e = 5$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
- ✓ Nếu $1 \leq X \leq 4$ thì $VP_{(1)}$ chia hết cho 5 và

$$VT_{(1)} \equiv 5 - X \not\equiv 0 \pmod{5},$$

ta có mâu thuẫn.

Kết luận, bộ số nguyên tố duy nhất thỏa mãn đề bài là $(a, b, c, d, e) = (5, 5, 5, 5, 5)$.

c) Ta biến đổi giả thiết như sau

$$a^2 + b \mid a(ab + 1) \Rightarrow a^2 + b \mid b(a^2 + b) - a(ab + 1) = b^2 - a$$

Tương tự $b^2 - a \mid b(ab + 1) - a(b^2 - a) = a^2 + b$, do đó $|a^2 + b| = |b^2 - a|$.

Ta xét hai trường hợp sau.

- ✓ Với $a^2 + b = b^2 - a$ ta biến đổi phương trình này như sau

$$\begin{aligned} a^2 + b = b^2 - a &\Leftrightarrow a^2 - b^2 + a + b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a + b)(a - b + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow b = a + 1 \text{ vì } a + b > 0. \end{aligned}$$

Từ đây thay vào giả thiết ta thấy đều thỏa mãn.

- ✓ Với $a^2 + b = a - b^2$ ta có $a^2 \geq a$ vì a nguyên dương. Do đó $a = a^2 + b + b^2 > a$ nên trường hợp này loại.

Kết luận, tất cả các cặp (a, b) thỏa mãn là $(t, t + 1)$, với t là số nguyên dương bất kì.



Câu 2.

a) Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + x - 2y = 0 \\ x^2 + 1 = 4y \end{cases}.$$

✎ Lời giải.

a) ĐKXĐ: $x \geq -2$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x+1)(\sqrt{x+2}-2) + (x+6)(\sqrt{x+7}-3) = x^2 + 2x - 8$$

Nhân liên hợp ta thu được

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}(x-2) + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}(x-2) = (x-2)(x+4),$$

tức là

$$\begin{cases} x = 2 \text{ (TMĐK)} \\ \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} = x+4 \end{cases} \quad (*)$$

Xét phương trình (*). Ta thấy:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < \frac{x+2}{2} \\ 0 &< \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} < \frac{x+6}{2}. \end{aligned}$$

Do đó, $VT_{(*)} < \frac{x+2}{2} + \frac{x+6}{2} = x+4 = VP_{(*)}$. Nên phương trình này vô nghiệm.Vậy, phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Phương trình (1) tương đương với: $(x-2y)(x-y) + x - 2y = 0$, hay $(x-2y)(x-y+1) = 0$.

✓ **Trường hợp 1.** $x = 2y$. Thay vào phương trình (2) ta được $4y^2 + 1 = 4y$, hay $y = \frac{1}{2}$.
Từ đó $x = 1$.✓ **Trường hợp 2.** $x = y - 1$. Thay vào phương trình (2) ta được $(y-1)^2 + 1 = 4y$.
Giải ra được $y = 3 \pm \sqrt{7}$.Với $y = 3 + \sqrt{7}$ thì $x = 2 + \sqrt{7}$.Với $y = 3 - \sqrt{7}$ thì $x = 2 - \sqrt{7}$.Vậy, hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = \left(1, \frac{1}{2}\right), (2 + \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}), (2 - \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7})$.

Câu 3. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2}.$$

Lời giải.

Giả sử c là số nhỏ nhất trong 3 số a, b, c . Khi đó $0 \leq c \leq \min\{a, b\}$, ta được bất đẳng thức sau

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2}$$

Ta đặt $x = a + \frac{c}{2}, y = b + \frac{c}{2}$ thì $x, y > 0$ và $x + y = a + b + c \leq 3$, bài toán trở thành.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{(x + y)^2}{x^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{(x + y)^2}{y^2} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} + \frac{1}{9} \cdot 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ kết hợp bất đẳng thức AM – GM ta có

$$Q = \frac{1}{9} \cdot \left(t^2 + 2t + 1 + \frac{2}{t} \right) = \frac{1}{9} \cdot \left(t^2 + \frac{3t}{2} + 1 + \frac{t}{2} + \frac{2}{t} \right) \geq \frac{1}{9} \cdot (4 + 3 + 1 + 2) = \frac{10}{9}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{10}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $(a, b, c) = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ và các hoán vị. ■

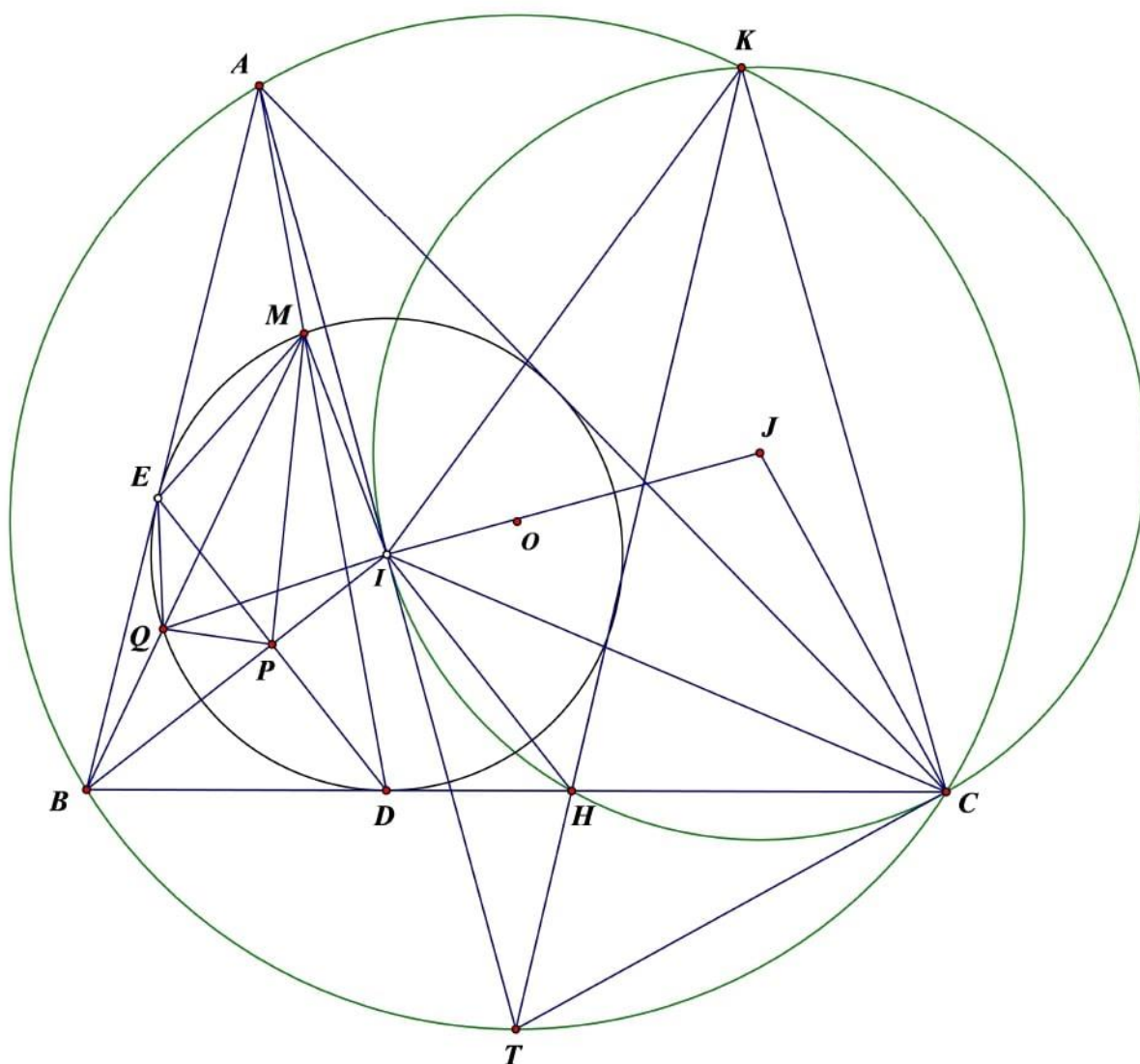
Câu 4. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định (BC khác đường kính). Điểm A thuộc cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, AB lần lượt tại D, E . Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là M ; BM cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là Q ; BI cắt DE tại P .

a) Chứng minh tứ giác $IPQM$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{BME} = \widehat{DMP}$.

c) Đường tròn đi qua C tiếp xúc với AI tại I cắt BC tại H và cắt (O) tại điểm thứ hai là K . Chứng minh khi A di động trên (O) thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Vì BD là tiếp tuyến của (I) nên ta có $BD^2 = BQ \cdot BM$ (1).

Theo hệ thức lượng xét $\triangle IBD$ vuông tại D , đường cao DP ta có $BD^2 = BP \cdot BI$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $BP \cdot BI = BQ \cdot BM$ nên tứ giác $IPQM$ nội tiếp. Bài toán được chứng minh.

b) Vì tứ giác $IPQM$ nội tiếp nên

$$\widehat{MPI} = \widehat{MQI} = \frac{180 - \widehat{MIQ}}{2} = 90 - \frac{\widehat{MIQ}}{2}.$$

Vì $\widehat{MEQ}$ là góc bù với góc chắn cung QM nên ta có

$$\widehat{MEQ} = 180 - \frac{\widehat{MIQ}}{2} = 90 + \widehat{MPI} = \widehat{IPD} + \widehat{MPI} = \widehat{MPD}.$$

Mà $\widehat{MQE} = \widehat{MDE} = \widehat{MDP}$ vì cùng chắn cung ME , do đó $\triangle MQE \sim \triangle MDP (g.g)$ suy ra $\widehat{BME} = \widehat{DMP}$. Bài toán được chứng minh.

c) Gọi T là giao của AI với (O) và gọi J là tâm ngoại tiếp (CKI) .

Ta có

$$\widehat{TIC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB}}{2} = \widehat{BCT} + \widehat{ICB} = \widehat{TCI}.$$

Do đó $\triangle TCI$ cân tại T nên $TC = TI$, tương tự ta được $TI = TB$.

Vì TI là tiếp tuyến của (J) mà $TI = TC$ nên TC cũng là tiếp tuyến của (J) .

Gọi H' là giao của TK với BC ta có $TH'.TK = TC^2 = TI^2$ vì $\triangle TCH' \sim \triangle TKC (g.g)$ nên H' thuộc (J) mà H' thuộc BC do đó H trùng H' .

Vì B, C và (O) cố định nên T cố định, do đó HK luôn đi qua điểm cố định T . Bài toán được chứng minh.



Câu 5. Trong một hoạt động ngoại khóa có 20 giáo viên và 80 học sinh đến từ nhiều nơi tham gia. Biết rằng mỗi giáo viên quen với ít nhất 65 người và mỗi học sinh quen với tối đa 12 người (Quan hệ quen được xem là có tính 2 chiều: Người A quen người B thì người B cũng quen người A). Ban tổ chức xếp họ thành 41 nhóm. Hỏi ban tổ chức có thể xếp sao cho nhóm nào cũng có 2 người quen nhau không? Vì sao?

✎ Lời giải.

Giả sử BTC có thể xếp được thỏa mãn yêu cầu đề bài. Do có 20 giáo viên, nên có ít nhất $41 - 20 = 21$ nhóm không có giáo viên. Vì vậy, trong mỗi nhóm này phải có ít nhất 1 cặp học sinh quen nhau. Do đó, số cặp học sinh quen nhau ít nhất là 21 cặp.

Theo giả thiết, mỗi học sinh quen tối đa 12 người, nên số lượt học sinh quen giáo viên không vượt quá:

$$80 \cdot 12 - 2 \cdot 21 = 918 \text{ (lượt)} . \quad (1)$$

Lại từ đề bài, vì mỗi giáo viên quen ít nhất 65 người, nên mỗi GV quen ít nhất $65 - 19 = 46$ học sinh. Do đó, số lượt giáo viên quen học sinh không ít hơn:

$$46 \cdot 20 = 920 \text{ (lượt)} . \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có mâu thuẫn.

Vậy, BTC không thể xếp được. ■