

Câu 1. (4,0 điểm) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = \frac{1}{2}, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}}), \forall n \geq 2$.

a) Chứng minh rằng $x_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}^2} - \frac{1}{x_n}$, $\forall n \geq 2$ và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$.

Câu 2. (4,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: R \rightarrow R$ thỏa mãn:

$$f(x - 3f(y)) = xf(y) - yf(x) - 2f(x), \forall x, y \in R.$$

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B và C là tiếp điểm). Lấy điểm E thuộc cung lớn BC, đường tròn (ABE) cắt AC tại điểm D khác A. Chứng minh rằng $EB + ED \geq 2.EC$.

b) Cho tam giác ABC có D là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường thẳng qua D vuông góc với AD cắt AC tại E và AB tại F. Các đường thẳng qua E song song DC và qua F song song DB cắt nhau tại I, các đường thẳng qua E vuông góc DC và qua F vuông góc DB cắt nhau tại H. Gọi G là giao điểm thứ hai của AD và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh I, E, H, F thuộc một đường tròn có tâm nằm trên AG và GH vuông góc với ID.

Câu 4. (4,0 điểm) Cho số nguyên $n \geq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của số nguyên dương m theo n sao cho tồn tại m tập hợp $A_1; A_2; \dots; A_m$ là tập con của tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn A_1 có 1 phần tử, A_2 có 2 phần tử, ..., A_m có m phần tử và trong m tập hợp đó không có tập hợp nào là tập con của một tập hợp khác.

Câu 5. (3,0 điểm) Kí hiệu $lcm(x; y)$ là bội chung nhỏ nhất của x và y . Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(a; b; c)$ sao cho tồn tại số nguyên dương n để:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = n.lcm(a; b) + n^2 \\ b^2 + c^2 = n.lcm(b; c) + n^2 \\ c^2 + a^2 = n.lcm(c; a) + n^2 \end{cases}$$

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi số 1: Cán bộ coi thi số 2: