

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỶ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2023-2024**

Môn thi: **TOÁN** (Chuyên)

Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)
(Dành cho thí sinh vào Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Bài 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{xy}+y} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}-x} \right)$ và biểu thức

$$Q = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \text{ với } x > 0, y > 0 \text{ và } x \neq y. \text{ Rút gọn các biểu thức P, Q và}$$

chứng minh rằng với các số x, y dương phân biệt tùy ý thì $4Q+1 > 2P$.

Bài 2. (1,5 điểm) Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = kx + 5$. Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm A và B. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục Ox.

a) Khi $k = -4$, tính diện tích hình thang ABDC.

b) Tìm tất cả các giá trị của k để AD và BC cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường tròn đường kính CD.

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $10x^2 + 3x + 2 = (6x+1)\sqrt{x^2+2}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 - y)\sqrt{x-2} = x(y-x+2) \\ (y-1)(y-3x-3) = x^2 - 3x + 3 - 8\sqrt{x-2} \end{cases}$$

Bài 4. (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC, với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở D. Đường tròn đường kính AD cắt đường tròn đường kính OD tại điểm E (khác D). Gọi F là giao điểm của đoạn thẳng OE và đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng 3 điểm A, O, E thẳng hàng và CF là tia phân giác của góc BCE.

b) Các tia AB, AC lần lượt cắt đường tròn đường kính AD tại các điểm G, K (khác A). Chứng minh rằng OD đi qua trung điểm của đoạn thẳng GK.

Bài 5. (1,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC < BC$, đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại M. Lấy điểm E nằm giữa A và M. Trên cạnh AC, BC lần lượt lấy điểm D, F sao cho $AD = AE$ và $BF = BE$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF lần lượt cắt AB và BC tại G (khác E) và H (khác F). Chứng minh rằng (O) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF và các đường thẳng CM, ED, GH đồng quy.

Bài 6. (1,5 điểm)

a) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$2008(x^2 + y^2 + z^2) + 15\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2023(x + y + z).$$

b) Cho phương trình $x^2 - 4mn^2x - 4mn^3 - m = 0$, với m và n là các tham số. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m; n) để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều là số nguyên và $x_1 + x_2 + 1$ là số nguyên tố.

LỜI GIẢI

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{xy}+y} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}-x} \right)$ và biểu thức

$$Q = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \text{ với } x > 0, y > 0 \text{ và } x \neq y. \text{ Rút gọn các biểu thức } P, Q \text{ và}$$

chứng minh rằng với các số x, y dương phân biệt tùy ý thì $4Q+1 > 2P$.

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Rightarrow 2P = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$$

$$Q = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 4Q+1 = 2(x+y)+1$$

Nhân hai vế của biểu thức $4Q+1-2P$ cho 2

$$\begin{aligned} 2(4Q+1-2P) &= 4x+4y+2-4\sqrt{x}-4\sqrt{y} \\ &= (2\sqrt{x}-1)^2 + (2\sqrt{y}-1)^2 \end{aligned}$$

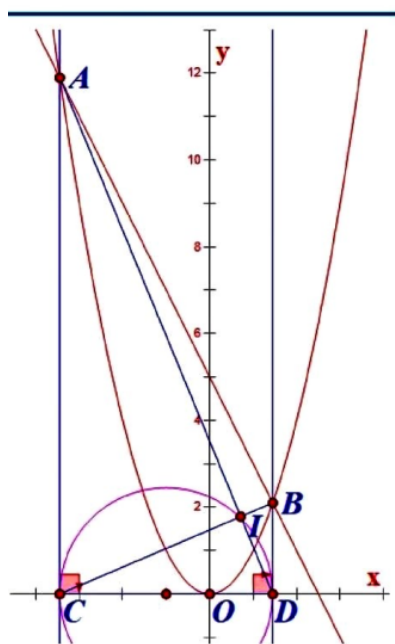
Ta có $x \neq y \Rightarrow 2(4Q+1-2P) > 0 \Rightarrow 4Q+1 > 2P$

Bài 2. Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng

(d): $y = kx + 5$. Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm A và B. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục Ox.

a) Khi $k=-4$, tính diện tích hình thành ABDC.

b) Tìm tất cả các giá trị của k để AD và BC cắt nhau tại 1 điểm nằm trên đường tròn đường kính CD.



a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2 = -4x + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$a + b + c = 1 + 4 - 5 = 0$$

$$x = 1, x = -5$$

$$x = 1 \Rightarrow y = x^2 = 1$$

$$x = -5 \Rightarrow y = x^2 = 25$$

$$A(-5; 25) \text{ và } B(1; 1)$$

Diện tích hình thang $ABDC$:

$$\frac{(AC + BD) \cdot CD}{2} = \frac{(25 + 1) \cdot 6}{2} = 78 \text{ (đvdt)}$$

b) + Gọi I là giao điểm của AD và BC .

Vì I thuộc đường tròn đường kính CD nên:

$$\widehat{CID} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow AD \perp BC$$

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = kx + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - kx - 5 = 0$$

$$c.a = -5 < 0$$

Do đó hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

Tọa độ hai giao điểm là $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$.

$$+ \text{ Theo định lí Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

+ Phương trình đường thẳng AD có dạng: $y = ax + b$. Ta có:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_D = ax_D + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx_1 + 5 = ax_1 + b \\ 0 = ax_2 + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow kx_1 + 5 = a(x_1 - x_2) \text{ (trừ theo vế)}$$

+ Phương trình đường thẳng BC có dạng: $y = a'x + b'$. Tương tự như trên ta có:

$$kx_2 + 5 = a'(x_2 - x_1)$$

Nhân theo vế hai ý vừa có được:

$$(kx_1 + 5)(kx_2 + 5) = -a.a' \cdot (x_1 - x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 x_1 x_2 + 5k(x_1 + x_2) + 25 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \Leftrightarrow -5k^2 + 5k^2 + 25 = k^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 5 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5}$$

$$\text{Vậy } k = \pm\sqrt{5}$$

Bài 3:

$$a) \text{ Giải phương trình: } 10x^2 + 3x + 2 = (6x + 1)\sqrt{x^2 + 2}$$

Cách 1: Bình phương hai vế rồi casio bậc 4.

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow t^2 = x^2 + 2$ ($t > 0$). Ta được:

$$9x^2 + 3x + t^2 = (6x + 1)t \Rightarrow (9x^2 - 6xt + t^2) + 3x - t = 0 \Rightarrow (3x - t)^2 + (3x - t) = 0$$

$$\Rightarrow (3x - t)(3x - t + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = t \\ 3x + 1 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{x^2 + 2} \\ 3x + 1 = \sqrt{x^2 + 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x^2 = x^2 + 2 & (3x \geq 0) \\ 9x^2 + 6x + 1 = x^2 + 2 & (3x + 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} & (3x \geq 0) \\ 8x^2 + 6x - 1 = 0 & (3x + 1 \geq 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{8} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-3 + \sqrt{17}}{8} \right\}$$

$$\text{b) Giải hệ: } \begin{cases} (x^2 - y)\sqrt{x-2} = x(y - x + 2) & (1) \\ (y-1)(y-3x-3) = x^2 - 3x + 3 - 8\sqrt{x-2} & (2) \end{cases}$$

Đk: $x \geq 2$

Xét phương trình (1):

$$\begin{aligned} (x^2 - y)\sqrt{x-2} &= x(y - x + 2) \Rightarrow x^2\sqrt{x-2} - y\sqrt{x-2} = xy - x(x-2) \\ \Rightarrow x^2\sqrt{x-2} - xy + x(x-2) - y\sqrt{x-2} &= 0 \Rightarrow x(x\sqrt{x-2} - y) + \sqrt{x-2}(x\sqrt{x-2} - y) = 0 \\ \Rightarrow (x\sqrt{x-2} - y) \left(\underbrace{x + \sqrt{x-2}}_{>0 \text{ vì } x \geq 2} \right) &= 0 \Rightarrow x\sqrt{x-2} - y = 0 \\ \Rightarrow y &= x\sqrt{x-2} \end{aligned}$$

Xét phương trình:

$$\begin{aligned} (y-1)(y-3x-3) &= x^2 - 3x + 3 - 8\sqrt{x-2} \Rightarrow y^2 - 3xy - 4y + 3x + 3 = x^2 - 3x + 3 - 8\sqrt{x-2} \\ \Rightarrow x^2(x-2) - 3x^2\sqrt{x-2} - 4x\sqrt{x-2} - x^2 + 6x + 8\sqrt{x-2} &= 0 \\ \Rightarrow (x^3 - 3x^2 + 6x) - \sqrt{x-2}(3x^2 + 4x - 8) &= 0 \Rightarrow x^3 - 3x(x-2) - \sqrt{x-2}(3x^2 + 4x - 8) = 0 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x-2}$ thì $t^2 = x-2$ và $4x-8 = 4t^2$

$$(x^3 - 3xt^2) - t(3x^2 + 4t^2) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2t - 3xt^2 - 4t^3 = 0 \Rightarrow (x-4t)(x^2 + tx + t^2) = 0$$

$$\text{Mà } x^2 + tx + t^2 = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 > 0 \text{ (dấu bằng không xảy ra)}$$

Ta được:

$$x = 4t \Rightarrow x = 4\sqrt{x-2} \Rightarrow x^2 = 16(x-2) \Rightarrow x^2 - 16x + 32 = 0$$

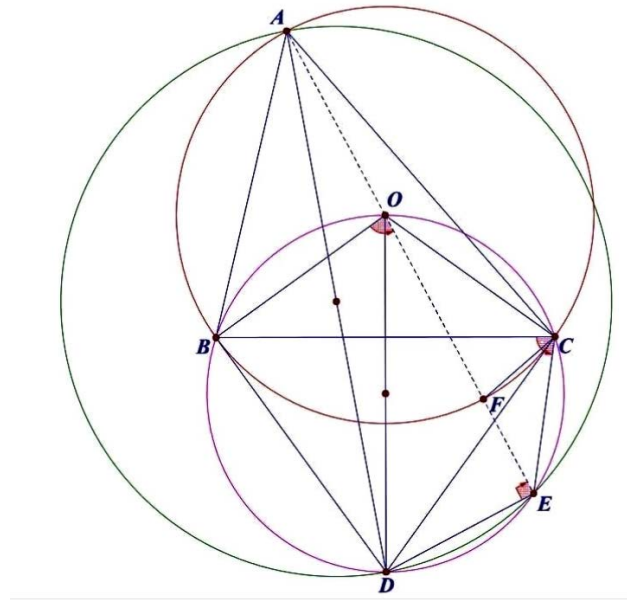
$$x = 8 \pm 4\sqrt{2} : \text{nhận}$$

$$x = 8 + 4\sqrt{2} \Rightarrow y = x\sqrt{x-2} = (8 + 4\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = (8 + 4\sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2}) = 32 + 16\sqrt{2}$$

$$x = 8 - 4\sqrt{2} \Rightarrow y = x\sqrt{x-2} = (8 - 4\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = (8 - 4\sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2}) = 32 - 16\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: } \begin{cases} x = 8 + 4\sqrt{2} \\ y = 32 + 16\sqrt{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 8 - 4\sqrt{2} \\ y = 32 - 16\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ nhọn, với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau ở D. Đường tròn đường kính AD cắt đường tròn đường kính OD tại điểm E (khác D). Gọi F là giao điểm của đoạn thẳng OE và đường tròn (O) .



a) Chứng minh A, O, E và CF là tia phân giác của $\widehat{BCE}$.

b) Các tia AB, AC lần lượt cắt đường tròn đường kính AD tại các điểm G, K (khác A). Chứng minh rằng OD đi qua trung điểm của đoạn thẳng GK.

a) + Xét đường tròn đường kính OD:

$$\widehat{OED} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

+ Xét đường tròn đường kính AD:

$$\widehat{AED} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OED} = \widehat{AED} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{A, O, E}$$

+ Trong đường tròn đường kính AD:

$$\widehat{BCE} = \widehat{BOE} \text{ (cùng chắn } \widehat{BE} \text{)}$$

+ Trong đường tròn (O) :

$$\widehat{BCF} = \frac{1}{2} \widehat{BOE} \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn } \widehat{BF} \text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCF} = \frac{1}{2} \widehat{BCE}$$

$$\Rightarrow CF \text{ là tia phân giác của } \widehat{BCE}$$

b) + Gọi I là giao điểm thứ hai của AD và (O) và L là giao điểm của GK và OD.

+ Gọi M là giao điểm của OD và BC. Dễ dàng ta chứng minh được OD là trung trực của BC.

$$\widehat{CMD} = 90^\circ \text{ mà } \widehat{CKD} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CMDK} \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{LDK} = \widehat{ACB}, \text{ mà } \widehat{ACB} = \widehat{AIB} \text{ (cùng chắn } \widehat{AB} \text{ của } (O))$$

$$\Rightarrow \widehat{LDK} = \widehat{AIB}$$

$$+ \widehat{BAI} = \widehat{DKL} \text{ (cùng chắn } \widehat{GD} \text{ của đường tròn đường kính AD)}$$

Ta được: $\triangle ABI \sim \triangle KLD$ (g - g) $\Rightarrow \frac{LK}{LD} = \frac{BA}{BI}$

Tương tự: $\triangle ACI \sim \triangle GLD$ (g - g) $\Rightarrow \frac{LG}{LD} = \frac{CA}{CI}$

Mà $\frac{BA}{BI} = \frac{CA}{CI}$

Đây là bổ đề quen thuộc từ hai tiếp tuyến và một cát tuyến, ta chứng minh được như sau:

$\triangle DIB \sim \triangle DBA$ (g - g) $\Rightarrow \frac{BA}{BI} = \frac{BD}{DI}$

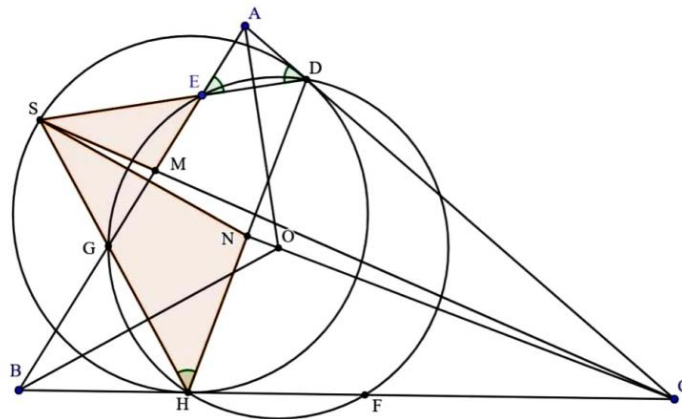
$\triangle DIC \sim \triangle DCA$ (g - g) $\Rightarrow \frac{CA}{CI} = \frac{CD}{DI}$

Mà $\frac{BD}{DI} = \frac{CD}{DI}$ nên $\frac{BA}{BI} = \frac{CA}{CI}$

Do đó: $\frac{LK}{LD} = \frac{LG}{LD} \Rightarrow LK = LG$

Vậy OD đi qua trung điểm L của GK

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC < BC$, đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại M. Lấy điểm E nằm giữa A và M. Trên cạnh AC, BC lần lượt lấy điểm D, F sao cho $AD = AE$ và $BF = BE$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF lần lượt cắt AB và BC tại G (khác E) và H (khác F). Chứng minh rằng (O) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF và các đường thẳng CM, ED, GH đồng quy.



Gọi S là giao của DE và GH. Ta đi chứng minh C, M, S thẳng hàng.

Ta có $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \widehat{DHS} \Rightarrow CD$ là tiếp tuyến của (SHD) tại D

Tương tự ta cũng có CH là tiếp tuyến của (SHD) tại H

Khi đó SC là đường đối trung của tam giác SHD

Gọi N là trung điểm HD. Theo bổ đề đường đối trung, ta có:

$\widehat{HSN} = \widehat{CSD}$ (1) Lại có tam giác SEG $\sim$ SHD

$\Rightarrow$ Tam giác SEM $\sim$ SHN (Chia đôi tỉ số đường trung tuyến)

$\Rightarrow \widehat{SEM} = \widehat{HSN}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{CSD} = \widehat{ESM} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 6:

a) Cho x, y, z dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh:

$$2008(x^2 + y^2 + z^2) + 15\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2023(x + y + z)$$

+ AB.GM ba số: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$

+ Ta có:

$$2008(x^2 + y^2 + z^2) + 15\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2008 \frac{(x + y + z)^2}{3} + 15 \cdot \frac{9}{x + y + z}$$

Đặt $t = x + y + z$ ($t \geq 3$), ta phải chứng minh:

$$2008 \frac{(x + y + z)^2}{3} + 15 \cdot \frac{9}{x + y + z} \geq 2023(x + y + z)$$

Tức là:

$$2008 \frac{t^3}{3} + 15 \cdot \frac{9}{t} \geq 2023t$$

$$\Rightarrow 2008t^3 + 405 \geq 6069t^2$$

$$\Rightarrow (t - 3)(2008t^2 - 45t - 135) \geq 0 \quad (1)$$

Trong đó

$$2008t^2 - 45t - 135$$

$$= 1993t^2 + 15t^2 - 45t - 135$$

$$= 1993t^2 + 15t(t - 3) - 135$$

$$\geq 1993 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 \cdot 0 - 135 > 0$$

$$\Rightarrow 2008t^2 - 45t - 135 > 0$$

Tức là (1) đúng

Vậy bài toán được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$

b) Cho phương trình ẩn x , tham số a và b : $x^2 - 4ab^2x - 4ab^3 - a = 0$

Tìm tất cả các cặp $(a; b)$ nguyên dương sao cho phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều nguyên và $x_1 + x_2 + 1$ là số nguyên tố.

$$\text{Ta có: } \Delta' = 4a^2b^4 + 4ab^3 + a = (4a^2b^4 + 4ab^3 + b^2) + a - b^2 = (2ab^2 + b)^2 + a - b^2$$

Để phương trình có hai nghiệm nguyên ta cần Δ' là số chính phương.

+ Xét hiệu:

$$(2ab^2 + b + 1)^2 - \Delta'$$

$$= (4a^2b^4 + b^2 + 1 + 4ab^3 + 4ab^2 + 2b) - (4a^2b^4 + 4ab^3 + a)$$

$$= (b^2 + 1 + 4ab^2 + 2b) - a$$

$$= b^2 + 2b + 1 + a(4b^2 - 1) > 0 \text{ vì } a, b \in \mathbb{N}^*$$

+ Xét hiệu:

$$(2ab^2 + b - 1)^2 - \Delta' = (4a^2b^4 + b^2 + 1 + 4ab^3 - 4ab^2 - 2b) - (4a^2b^4 + 4ab^3 + a)$$

$$= b^2 + 1 - 4ab^2 - 2b - a = b^2 \left(\underbrace{1 - 4a}_{< 0} \right) - 2b + \left(\underbrace{1 - a}_{< 0} \right) < 0$$

Ta được: $(2ab^2 + b - 1)^2 < \Delta' < (2ab^2 + b + 1)^2$

Mà Δ' là số chính phương nên $\Delta' = (2ab^2 + b)^2 \Rightarrow a = b^2$

+Xét biểu thức: $x_1 + x_2 + 1 = 4ab^2 + 1 = 4b^4 + 1 = (4b^4 + 4b^2 + 1) - 4b^2 = (2b^2 + 1)^2 - (2b)^2$
 $= (2b^2 - 2b + 1)(2b^2 + 2b + 1)$

Ta cần $x_1 + x_2 + 1$ là số nguyên tố, mà $2b^2 + 2b + 1 \geq 5$ nên:

$$2b^2 - 2b + 1 = 1 \Rightarrow b(b - 1) = 0 \Rightarrow b = 1 \text{ (vì } b \geq 1)$$

Kiểm tra lại: $x_1 + x_2 + 1 = 4b^4 + 1 = 5$: là số nguyên tố

Vậy $a = b = 1$