

Bài 1. 1) Cho biểu thức $P = \frac{3x + 5\sqrt{x} - 11}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2} - 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

2) Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x - \sqrt{x^2 + 5})(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^{2023} + y^{2023}$

Bài 2. a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$

Bài 3. a) Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d): $y = mx + 2m + 2$ ($m \neq 0$) đạt giá trị lớn nhất.

b) Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x - 3$ dư 2, $f(x)$ chia cho $x + 4$ dư 9, $f(x)$ chia cho $x^2 + x - 12$ được thương là $x^2 + 3$ và còn dư.

c) Một cửa hàng lưu niệm được nhận đặt gói tất cả 153 hộp quà như nhau bằng ba loại giấy màu xanh, đỏ, vàng để chuẩn bị cho Lễ Giáng sinh. Biết số hộp quà gói được màu đỏ bằng $\frac{8}{9}$ số hộp quà màu xanh, số hộp quà gói được màu vàng bằng $\frac{17}{16}$ số hộp quà màu đỏ và 153 hộp quà đều được cửa hàng gói hết. Tính số hộp quà mỗi màu mà cửa hàng đã gói được.

Bài 4. Cho đường tròn (O; R) và một đường thẳng d cố định sao cho khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d bằng 2R. Từ điểm A bất kì trên đường thẳng d, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Đoạn thẳng OA cắt BC tại H và cắt đường tròn (O) tại M. Kẻ CK vuông góc với đường kính BD tại K.

a) Chứng minh rằng $CA \cdot CD = CK \cdot AO$

b) Gọi I là giao điểm của AD và CK. Chứng minh rằng I là trung điểm của CK.

c) Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác ABOC đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 5. a) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{2b+c} + \frac{b^2}{2c+a} + \frac{c^2}{2a+b} \geq \frac{a+b+c}{3}$

b) Trong một buổi gặp gỡ giao lưu giữa các học sinh đến từ n quốc gia, người ta nhận thấy rằng cứ 10 học sinh bất kì thì có ít nhất 3 học sinh đến từ một quốc gia. Gọi k là số quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ. Chứng minh rằng $n < \frac{k+10}{2}$