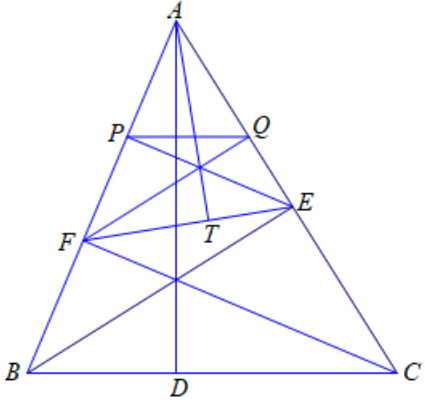
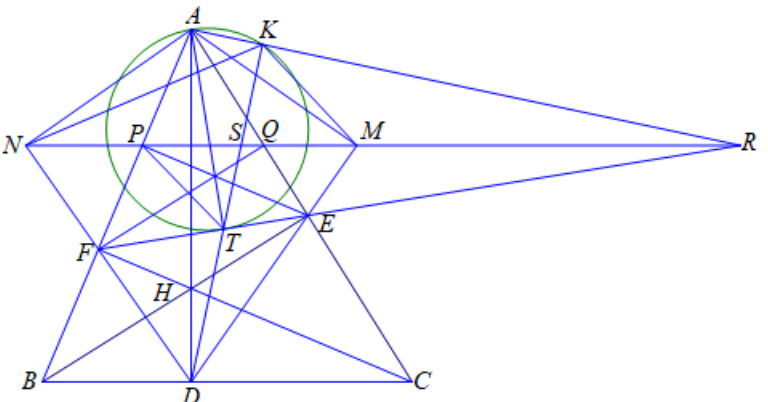


Thời gian làm bài: 180 phút
Ngày thi: 29/9/2023
(Đề thi gồm một trang có năm bài).

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Trường:

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
1.			4,00
	a)	<u>Chứng minh $a_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$:</u>	1,00
		Ta có dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \sqrt{2n + a_n^2 + \frac{1}{a_n}}$ (1), $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cần chứng minh $a_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2) bằng quy nạp Toán học:	0,25
		- Thật vậy, (2) đúng với $n = 1$, vì $a_1 = 1$. - Giả sử (2) đúng với số nguyên dương n , nghĩa là $a_n \geq 1$.	
		- Nên $a_{n+1} = \sqrt{2n + a_n^2 + \frac{1}{a_n}} > 1$. Vậy (2) đúng với $n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có $a_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
		(1) $\Leftrightarrow a_{n+1}^2 = 2n + a_n^2 + \frac{1}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Cần chứng minh $a_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (3) bằng quy nạp Toán học:	0,25
		- Thật vậy, (3) đúng với $n = 1$, vì $a_1 = 1$. - Giả sử (3) đúng với số nguyên dương n , nghĩa là $a_n \leq n$.	
		- Vậy $a_{n+1}^2 = 2n + a_n^2 + \frac{1}{a_n} \leq 2n + n^2 + 1 = (n + 1)^2 \Rightarrow a_{n+1} \leq n + 1$. Vậy (3) đúng với $n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có $a_n \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
	b)	<u>Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$:</u>	3,00
		Ta có $a_{n+1}^2 = 2n + a_n^2 + \frac{1}{a_n} > 2n + a_n^2$ hay $a_{n+1}^2 > 2n + a_n^2$ (4), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
2.		Áp dụng (4) ta có $a_{n+1}^2 > 2n + a_n^2 > 2n + 2(n - 1) + a_{n-1}^2 > \dots > 2n + 2(n - 1) + \dots + 2.1 + a_1^2 = n^2 + n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow a_n^2 \geq n^2 - n + 1 \Leftrightarrow a_n \geq \sqrt{n^2 - n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	1,25
		Vậy $\sqrt{n^2 - n + 1} \leq a_n \leq n \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \leq \frac{a_n}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,50
		Mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1$.	0,50
		Áp dụng định lý kẹp ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 1$.	0,50
		<u>Giải phương trình hàm:</u>	4,00
		Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $f(2a) + 2f(b) = f(2(a + b))$ (1), $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.	0,50
		Thế $a = b = 0$ vào (1) ta có $f(0) + 2f(0) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ Thế $a = 0$ và b bởi a vào (1) ta có $f(0) + 2f(a) = f(2a), \forall a \in \mathbb{Z}$. $\Leftrightarrow f(2a) = 2f(a)$ (2), $\forall a \in \mathbb{Z}$	1,00
		Áp dụng (2) ta có (1) $\Leftrightarrow 2f(a) + 2f(b) = 2f(a + b), \forall a, b \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{Z}$.	1,00
		Áp dụng kết quả phương trình hàm Cauchy ta có $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{Z}$, với $c = f(1) \in \mathbb{Z}$.	1,00
		Kiểm tra các hàm số $f(x) = cx$, với $c \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$ đều thỏa mãn bài toán.	0,50
		Vậy chỉ có các hàm số $f(x) = cx$, với $c \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn bài toán.	

3.		4,00
	a) <u>Chứng minh $PQ \parallel BC$:</u>	1,00
	 Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (vì BE, CF là hai đường cao của $\triangle ABC$) $\Rightarrow$ tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{CBF} = \widehat{QEF}$.	0,50
	Tương tự tứ giác $EFPQ$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{QEF} = \widehat{APQ}$. Vậy $\widehat{CBF} = \widehat{APQ}$ nên $PQ \parallel BC$.	0,50
	b) <u>Chứng minh AK, EF, PQ đồng quy:</u>	3,00
	 Gọi M, N, R, S lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với bốn đường thẳng DE, DF, EF, DK. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow AD, BE, CF$ đồng quy tại H. Ta có $\widehat{PFN} = \widehat{BFD} = \widehat{BHD} = \widehat{AHE} = \widehat{AFE} = \widehat{PFT}$ (vì tương tự có hai tứ giác $BDHF, AEHF$ nội tiếp đường tròn) nên $\widehat{PFN} = \widehat{PFT}$. Mặt khác $\widehat{NPF} = \widehat{FBC}$ (vì $PQ \parallel BC$), mà $\widehat{FBC} = \widehat{AET} = \widehat{TPF}$ (vì tương tự có hai tứ giác $BCEF, AETP$ nội tiếp đường tròn) nên $\widehat{NPF} = \widehat{TPF}$.	0,50

		Vậy $\triangle NPF = \triangle TPF$ (g-c-g) $\Rightarrow FN = FT$, mà cạnh AF chung và $\widehat{AFN} = \widehat{AFT}$ (vì $\widehat{PFN} = \widehat{PFT}$) $\Rightarrow \triangle ANF = \triangle ATF$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{ANF} = \widehat{ATF} = 90^\circ$ hay $\widehat{AND} = 90^\circ$. Tương tự $\widehat{AMD} = 90^\circ$, mà $\widehat{AKD} = \widehat{AKT} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AT). Vậy năm điểm A, K, M, D, N cùng thuộc đường tròn đường kính AD $\Rightarrow \widehat{MKD} = \widehat{MND} = \widehat{NMD} = \widehat{NKD}$ (vì tương tự có $\widehat{HDE} = \widehat{HDF}$ và $AD \perp PQ$ nên $\triangle DMN$ cân tại D). Vì $\triangle AEF$ có ba đường cao $\overline{AT}, \overline{EP}, \overline{FQ}$ đồng quy và $PQ \cap EF = \{R\}$ nên $(E, F, T, R) = -1$. $\Leftrightarrow \overline{D(E, F, T, R)} = -1 \Leftrightarrow \overline{(M, N, S, R)} = -1 \Leftrightarrow \overline{K(M, N, S, R)} = -1$ Lại có $\widehat{MKS} = \widehat{NKS}$ (do $\widehat{MKD} = \widehat{NKD}$). Từ đó $KR \perp KS$, mà $KA \perp KS$. Do đó A, K, R thẳng hàng nên AK, EF, PQ đồng quy.	0,50
			0,50
			0,50
4.			4,00
	a)	<i>Tìm công thức tổng quát của (u_n) và tìm số dư trong phép chia u_p cho p:</i> Ta có dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 3u_n + 10$ (1), $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (1) $\Leftrightarrow u_{n+1} + 5 = 3(u_n + 5)$ (2), $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng (2) ta có $u_{n+1} + 5 = 3(u_n + 5) = 3^2(u_{n-1} + 5) = \dots = 3^n(u_1 + 5)$ $\Leftrightarrow u_{n+1} = 6 \cdot 3^n - 5$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $u_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 5$ (là số nguyên dương), $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $3 \nmid p$, áp dụng định lý Fermat nhỏ ta có $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Do đó $u_p = 6 \cdot 3^{p-1} - 5 \equiv 1 \pmod{p}$ hay số dư trong phép chia u_p cho số nguyên tố $p > 3$ luôn bằng 1.	2,00
			1,00
			1,00
	b)	<i>Chứng minh tồn tại số nguyên dương $s > t$:</i> Gọi $u_t = 6 \cdot 3^{t-1} - 5 = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ là cách phân tích ra thừa số nguyên tố của u_t, với $t \in \mathbb{N}^*, t > 1$. Đặt $t_1 = t + \prod_{i=1}^k \varphi(p_i^{a_i+1})$, vì $5 \nmid 3$ nên $\gcd(p_i, 3) = 1$, $\forall i = \overline{1, k}$, từ đó $u_{t_1} = 6 \cdot 3^{t_1-1} - 5 \equiv u_t \pmod{p_i^{a_i+1}}$, $\forall i = \overline{1, k}$. Mặt khác $\nu_{p_i}(u_t) = a_i$ nên $\nu_{p_i}(u_{t_1}) = a_i$, $\forall i = \overline{1, k}$ hay $\frac{u_{t_1}}{u_t} \in \mathbb{N}^*$. Lại có $\frac{u_{t_1}}{u_t} > 1$ nên u_{t_1} có thêm ít nhất một ước nguyên tố khác $p_1, p_2, \dots, p_k$. Lý luận tương tự như trên, cho ta một dãy $u_{t_1}, u_{t_2}, \dots$ mà số các ước nguyên tố của chúng tăng ngặt, dẫn đến tồn tại số nguyên dương $s > t$ để u_s thỏa mãn bài toán.	2,00
			1,00
			0,50
			0,50
5.			4,00
	a)	<i>Tính số cách đặt 29 chiếc thẻ:</i> Tồn tại cách đặt thẻ thỏa mãn bài toán, như đặt thẻ đầu tiên bên trái mà bên trái của nó có đúng 10 viên bi và giữa hai thẻ kề nhau có đúng 10 viên bi. Xét cách đặt thẻ thỏa mãn bài toán, ta đánh số các thẻ từ trái sang phải là t_i, với $i = \overline{1, 29}$. Gọi số viên bi bên trái t_1 là b_1, số viên bi nằm giữa t_i và t_{i+1} là b_{i+1} (với $i = \overline{1, 28}$), số viên bi bên phải t_{29} là b_{30}.	2,00
			0,50

	Ta có hệ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{30} b_i = 2024 \\ b_i \geq 9, \forall i = \overline{1, 30} \end{cases} \quad (I).$	0,50
	Đặt $a_i = b_i - 8, \forall i = \overline{1, 30}$, vậy hệ (I) trở thành $\begin{cases} \sum_{i=1}^{30} a_i = 1784 \quad (1) \\ a_i \geq 1, \forall i = \overline{1, 30} \end{cases}.$	0,50
	Áp dụng kết quả bài toán chia kẹo Euler, số nghiệm nguyên dương của (1) bằng C_{1783}^{29}, đó là số cách đặt 29 chiếc thẻ thỏa mãn bài toán.	0,50
b)	<u>Tìm số cách đặt 29 chiếc thẻ:</u> Tồn tại cách đặt thẻ thỏa mãn bài toán, như đặt thẻ mà "giữa" hai thẻ kề nhau có đúng 10 viên bi, chỉ trừ một trường hợp có 1744 bi. Xét cách đặt thẻ thỏa mãn bài toán, chọn một thẻ A cố định (vì hai cách đặt thẻ được coi là như nhau qua một phép quay quanh tâm O nên thẻ A có thể đặt ở trung điểm cạnh tùy ý của đa giác đã cho), ta đánh số các thẻ từ A ngược chiều quay kim đồng hồ là t_i, với $i = \overline{1, 29}$. Gọi số viên bi nằm "giữa" t_i và t_{i+1} là b_i, với $i = \overline{1, 28}$, số viên bi nằm "giữa" t_1 và t_{29} là b_{29}.	2,00
	Ta có hệ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{29} b_i = 2024 \\ b_i \geq 9, \forall i = \overline{1, 29} \end{cases} \quad (I).$	0,50
	Đặt $a_i = b_i - 8, \forall i = \overline{1, 29}$, vậy hệ (I) trở thành $\begin{cases} \sum_{i=1}^{29} a_i = 1792 \quad (1) \\ a_i \geq 1, \forall i = \overline{1, 29} \end{cases}.$	0,50
	Áp dụng kết quả bài toán chia kẹo Euler, số nghiệm nguyên dương của (1) bằng C_{1791}^{28}. Vì 29 là số nguyên tố nên ứng với mỗi cách đặt thẻ có đúng 29 cách đặt thẻ (kể cả cách đặt thẻ đó) là ảnh của cách đặt thẻ đó qua phép quay quanh tâm O. Vậy số các cách đặt 29 chiếc thẻ thỏa mãn bài toán là $\frac{C_{1791}^{28}}{29}$.	0,50

Hướng dẫn chung:

- Nếu thí sinh giải cách khác đúng thì được điểm tối đa theo quy định và cách cho điểm thành phần trên cơ sở của Hướng dẫn chấm và Biểu điểm này.
- Tổ Giám khảo môn Toán thống nhất trước khi chấm theo Hướng dẫn chấm và Biểu điểm này.