

Lời giải đề thi học sinh giỏi Toán lớp 9

tỉnh Lâm Đồng năm 2024-2025

CLB TOÁN HỌC CHUYÊN BẢO LỘC

CAo Quốc HưNG (TK10) TRÂN XUÂN NAM (TK11)

NGUYỄN BẢO QUỲNH NHƯ (TK11) Tô NGUYỄN THẢO NGỌC (TK11)

§1 Đề bài

Bài 1. (4,5 điểm)

1.1 Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x+1+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}\right) \text{ với } x \geq 0$$

1.2 Chứng minh rằng với mọi số nguyên chẵn n thì $n^3 + 44n$ chia hết cho 48.

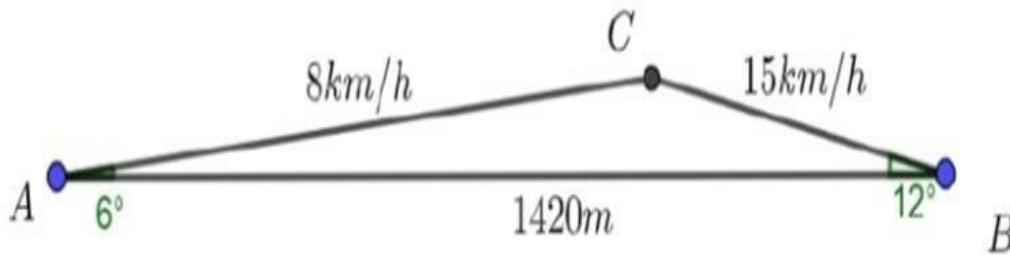
Bài 2. (4,5 điểm)

2.1 Số học sinh đạt "Học sinh giỏi cấp tỉnh" của thành phố X năm học 2023-2024 là một số tự nhiên có hai chữ số lớn hơn 50. Biết rằng tích hai chữ số lớn hơn tổng hai chữ số của số đó là 5 và chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị. Hỏi năm 2023-2024, thành phố X có bao nhiêu học sinh đạt "Học sinh giỏi cấp tỉnh".

2.2 Bạn Thanh đi xe đạp từ A đến B (gồm đoạn lên dốc AC và đoạn xuống dốc CB). Biết

$AB = 1420m$, $\widehat{A} = 6^\circ$, $\widehat{B} = 12^\circ$, vận tốc lên dốc là $8km/h$ và xuống dốc là $15km/h$ (Minh họa hình bên dưới). Tính thời gian bạn Thanh đi xe đạp từ A đến B

(Cho biết $\cot 6^\circ = 9, 5$; $\cot 12^\circ = 4, 7$; $\sin 6^\circ = 0, 1$; $\sin 12^\circ = 0, 2$)



Bài 3. (4,0 điểm)

3.1 Vào dịp họp mặt gia đình đầu năm Giáp Thìn 2024, bạn An hỏi mẹ về tuổi của bác Hai và chú Sáu thì được mẹ trả lời "Lúc tuổi của bác Hai bằng tuổi chú Sáu hiện nay thì tuổi của bác Hai gấp ba lần tuổi của chú Sáu; lúc tuổi chú Sáu bằng tuổi bác Hai hiện nay thì tổng số tuổi của hai người đó là 98". Em hãy giúp bạn An tính tuổi của bác Hai và chú Sáu hiện nay.

3.2 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, R) có hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau tại I (I không trùng O).

Chứng minh rằng: $\sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2} = 2R\sqrt{2}$

Bài 4. (4,0 điểm)

4.1 Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $3a + 4b + 5c = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

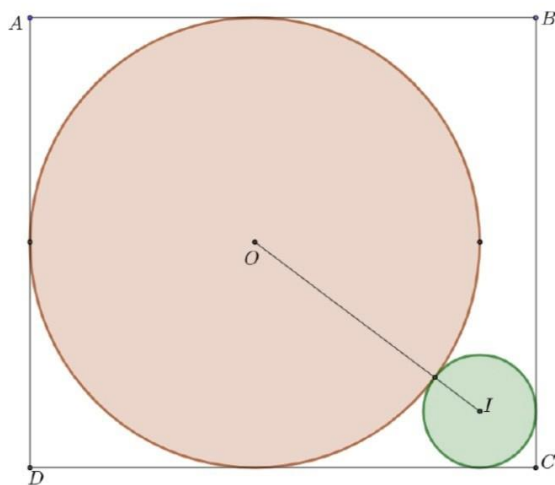
$$P = \frac{ab}{ab+a+b} + \frac{2ac}{ac+a+c} + \frac{3bc}{bc+b+c}$$

4.2 Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{D} = 120^\circ$. Một đường thẳng d đi qua C cắt tia đối của tia BA tại E và cắt tia đối của tia DA tại F . Gọi I là giao điểm của BF và DE . Chứng minh rằng: $BC^2 = BI \cdot BF$

Bài 5. (3,0 điểm)

5.1 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - \frac{2xy}{x+y} \\ \sqrt{x+y} + y = x^2 \end{cases}$$

5.2 Trong khuôn viên sân trường có khu đất hình chữ nhật với các kích thước là 16 mét và 18 mét. Nhà trường làm hai bồn hoa hình tròn, phần còn lại của khu đất đó nhà trường giao cho lớp 9A trồng cỏ (Minh họa hình bên). Tính diện tích phần trồng cỏ (lấy $\pi = 3,14$).



§2 Đáp án

Bài 1. (4,5 điểm)

1.1 Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x+1+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}\right) \text{ với } x \geq 0$$

1.2 Chứng minh rằng với mọi số nguyên chẵn n thì $n^3 + 44n$ chia hết cho 48.

1.1 Ta có:

Lời giải

1.1. Ta có:

$$\begin{aligned}A &= \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x+1+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}\right) \\&= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}\right) \\&= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x+1} : \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(x+1)} \\&= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(x+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \sqrt{x}+1\end{aligned}$$

1.2 Do n chẵn nên ta đặt $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $n^3 + 44n = 8k^3 + 88k = 8k(k^2 - 1) + 96k = 8k(k-1)(k+1) + 96k$

Do: $\begin{cases} 8k(k+1):16 \\ (k-1)k(k+1):3 \end{cases} \Rightarrow 8k(k-1)(k+1):48$

Mà $96k:48 \Rightarrow 8k(k-1)(k+1) + 96k:48$

hay $n^3 + 44n$ chia hết cho 48.

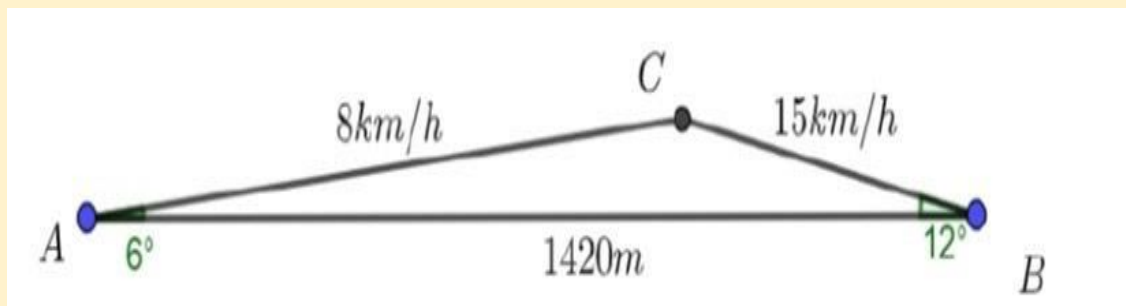
Bài 2. (4,5 điểm)

2.1 Số học sinh đạt "Học sinh giỏi cấp tỉnh" của thành phố X năm học 2023-2024 là một số tự nhiên có hai chữ số lớn hơn 50. Biết rằng tích hai chữ số lớn hơn tổng hai chữ số của số đó là 5 và chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị. Hỏi năm 2023-2024, thành phố X có bao nhiêu học sinh đạt "Học sinh giỏi cấp tỉnh".

2.2 Bạn Thanh đi xe đạp từ A đến B (gồm đoạn lên dốc AC và đoạn xuống dốc CB). Biết

$AB = 1420m, \hat{A} = 6^\circ, \hat{B} = 12^\circ$, vận tốc lên dốc là $8km/h$ và xuống dốc là $15km/h$ (Minh họa hình bên dưới). Tính thời gian bạn Thanh đi xe đạp từ A đến B

(Cho biết $\cot 6^\circ = 9, 5; \cot 12^\circ = 4, 7; \sin 6^\circ = 0, 1; \sin 12^\circ = 0, 2$)



Lời giải.

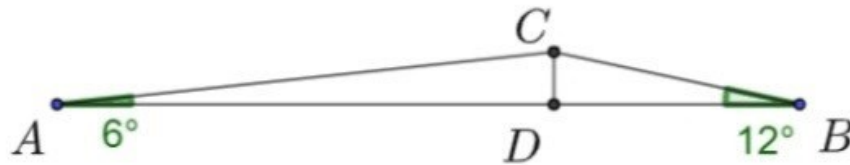
2.1 Số học sinh đạt "Học sinh giỏi cấp tỉnh" là $\overline{ab}$ với $(5 \leq a \leq 9, 0 \leq b < 9, 6 \leq a)$.

Theo giả thiết ta có: $a.b = a + b + 5 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 6$

Do $a \geq 5 \Rightarrow a - 1 \geq 4$ mà $a - 1 : 6$ nên $a - 1 = 6$

Vậy $\begin{cases} a - 1 = 6 \\ b - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 2 \end{cases}$ Vậy số học sinh đạt "Học sinh giỏi cấp tỉnh" là 72 học sinh.

2.2 Gọi D là hình chiếu của C lên AB .



Khi đó:

$$1420 = AB = AD + BD$$

$$= CD \cdot \cot \widehat{CAD} + CD \cdot \cot \widehat{CBD}$$

$$= CD \cdot (9,5 + 4,7) = 14,2 \cdot CD$$

$$\Rightarrow CD = 100$$

$$\text{Lại có: } AC = \frac{CD}{\sin 6^\circ} = \frac{100}{0,1} = 1000, BC = \frac{CD}{\sin 12^\circ} = \frac{100}{0,2} = 500$$

$$\text{Vậy thời gian bạn Thanh đi xe đạp từ } A \text{ đến } B \text{ là } \frac{1}{8} + \frac{0,5}{15} = \frac{19}{120} \text{ (giờ)}$$

Bài 3. (4,0 điểm)

3.1 Vào dịp họp mặt gia đình đầu năm Giáp Thìn 2024, bạn An hỏi mẹ về tuổi của bác Hai và chú Sáu thì được mẹ trả lời "Lúc tuổi của bác Hai bằng tuổi chú Sáu hiện nay thì tuổi của bác Hai gấp ba lần tuổi của chú Sáu; lúc tuổi chú Sáu bằng tuổi bác Hai hiện nay thì tổng số tuổi của hai người đó là 98". Em hãy giúp bạn An tính tuổi của bác Hai và chú Sáu hiện nay.

3.2 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, R) có hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau tại I (I không trùng O).

Chứng minh rằng: $\sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2} = 2R\sqrt{2}$

Lời giải.

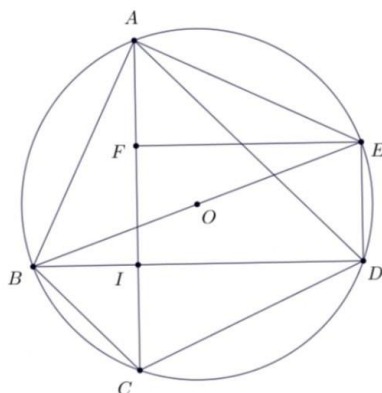
3.1 Gọi tuổi chú Sáu và tuổi bác Hai hiện tại lần lượt là x và y .

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} x = 3(2x - y) \\ y + (y + y - x) = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 5x \\ 3y - x = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{245}{6} \\ x = \frac{49}{2} \end{cases}$$

Vậy số tuổi của Bác Hai là $\frac{245}{6}$ và số tuổi của chú Sáu là $\frac{49}{2}$

3.2 Kẻ đường kính BE , kẻ $EF \perp AC$ tại F



Ta có $ED \parallel AC$ (vì cùng vuông góc với ID nên suy ra $ACDE$ là hình thang cân mà $EF \perp AC$, $ID \perp AC$ nên ta có $AF = IC$).

Do $EF \parallel ID$, $ED \parallel IF$ nên $IDEF$ là hình bình hành $\Rightarrow ED = IF$

Ta có $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AI^2 + BI^2 + CI^2 + DI^2)$

$$= 2(AI^2 + CI^2 - 2AI \cdot CI + BI^2 + DI^2 + 2BI \cdot DI)$$

$$= 2[(AI - CI)^2 + (BI + DI)^2]$$

$$= 2(FI^2 + BD^2) = 2(ED^2 + BD^2) = 2BE^2 = 8R^2$$

Bài 4. (4,0 điểm)

4.1 Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $3a + 4b + 5c = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{ab}{ab + a + b} + \frac{2ac}{ac + a + c} + \frac{3bc}{bc + b + c}$$

4.2 Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{D} = 120^\circ$. Một đường thẳng d đi qua C cắt tia đối của tia BA tại E và cắt tia đối của tia DA tại F . Gọi I là giao điểm của BF và DE .

Chứng minh rằng: $BC^2 = BI \cdot BF$

Lời giải.

4.1 Ta có bất đẳng thức

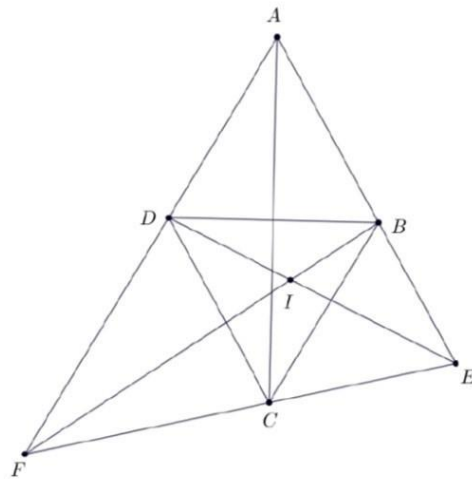
$$\frac{9}{a+b+c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \frac{9}{a+b+c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \forall a, b, c > 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

$$\begin{aligned} \text{Do vậy: } P &= \frac{ab}{ab+a+b} + \frac{2ac}{ac+a+c} + \frac{3bc}{bc+b+c} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \frac{2}{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} + \frac{3}{1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \\ &\leq \frac{1+a+b}{9} + \frac{2(1+a+c)}{9} + \frac{3(1+b+c)}{9} \\ &= \frac{6+3a+4b+5c}{9} = 2 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

4.2



$$\text{Có } \angle ADB = \frac{\angle ADC}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều

suy ra $AB = AD = BD = BC = DC$

$$\text{Do } \begin{cases} BC // AB \\ CD // AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{EB}{BA} = \frac{CE}{CF} \\ \frac{DA}{DF} = \frac{EC}{FC} \end{cases} \Rightarrow \frac{EB}{BA} = \frac{DA}{DF} \Rightarrow \frac{EB}{BD} = \frac{BD}{DF}$$

$$\text{Xét } \triangle EBD \text{ và } \triangle BDF \text{ có } \begin{cases} \angle EBD = \angle BDF (= 120^\circ) \\ \frac{EB}{ED} = \frac{BD}{DF} \end{cases}$$

suy ra $\triangle EBD \sim \triangle BDF$ (c.g.c)

$$\text{suy ra } \widehat{BDE} = \widehat{DFB}$$

Xét $\triangle BID$ và $\triangle BDF$ (c.g.c)

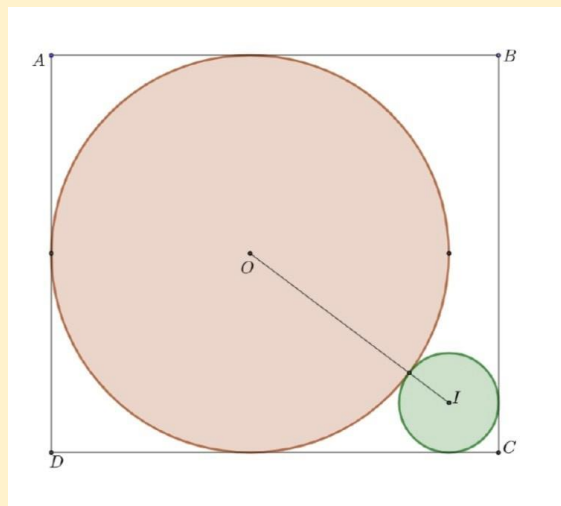
$$\text{suy ra } \frac{BD}{BF} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BD^2 = BI \cdot BF$$

$$\text{hay } BC^2 = BI \cdot BF$$

Bài 5. (3,0 điểm)

$$5.1 \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - \frac{2xy}{x+y} \\ \sqrt{x+y} + y = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - \frac{2xy}{x+y} \\ \sqrt{x+y} + y = x^2 \end{cases}$$

5.2 Trong khuôn viên sân trường có khu đất hình chữ nhật với các kích thước là 16 mét và 18 mét. Nhà trường làm hai bồn hoa hình tròn, phần còn lại của khu đất đó nhà trường giao cho lớp 9A trồng cỏ (Minh họa hình bên). Tính diện tích phần trồng cỏ (lấy $\pi = 3,14$).



Lời giải. 5.1 ĐKXĐ: $x + y > 0$

Từ phương trình (1) ta có:

$$(x+y)^2 - 2xy = 1 - \frac{2xy}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) = (x+y) - 2xy$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x+y)(x+y+1) = 2xy(x+y-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+2xy+y^2+x+y=2xy \end{cases}$$

Trường hợp 1: Nếu $x^2+2xy+y^2+x+y=2xy \Leftrightarrow x^2+y^2+x+y=0$ (vô lí).

Trường hợp 2: Nếu $x+y=1$ từ phương trình (2) ta có:

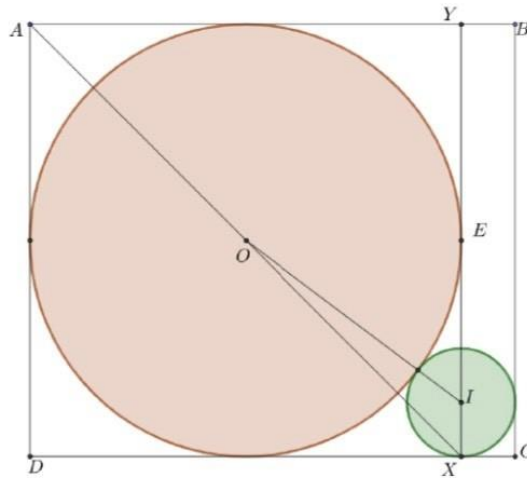
$$x^2 = 1 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=-2 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

Thử lại: $(x, y) \in \{(1; 0); (-2; 3)\}$

5.2 Dựng hình vuông $AYXD$ như hình vẽ



Trên XY lấy I sao cho $XI = 2$

Ta chứng minh $(I, 2)$ tiếp xúc (O) .

Thật vậy: $OI = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 = 8 + 2$

Đặt $S(m^2)$ là phần diện tích trống cỏ. Điều kiện: $S > 0$.

Ta có: $S = S_{ABCD} - S_{(O)} - S_{(I)}$

Mặt khác, ta có:

$$S_{ABCD} = 16.18 = 288 (m^2)$$

$$S_{(O)} = \pi .82 = 64 \pi \text{ (} m^2 \text{)}$$

$$S_{(I)} = \pi .2^2 = 4 \pi \text{ (} m^2 \text{)}$$

$$\Rightarrow S = 288 - 64\pi - 4\pi \approx 74,48(m^2)$$