

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10**NĂM HỌC: 2023 – 2024**

Trường THPT Chuyên Khoa học tự nhiên

Môn thi : Toán (vòng 2)

Câu 1 : (3,5 điểm):

1) Giải phương trình

$$2x + 1 + 2\sqrt{4x^2 + 6x} = 4\sqrt{5x - x^2}$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 30 + \sqrt{x+y+120} \end{cases}$$

Câu 2 (2.5 điểm):

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn

$$4^x + (1+3^y)(1+7^y) = 2^x(3^y + 7^y + 2)$$

2) Với x,y,z là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^{14} - x^6 + 3}{x^2 y^2 + zx + zy} + \frac{y^{14} - y^6 + 3}{y^2 z^2 + xy + xz} + \frac{z^{14} - z^6 + 3}{z^2 x^2 + yz + yx}$$

Câu 3 (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn (O) có tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở T sao cho $TB > BC$ Gọi P và E lần lượt là trung điểm của TA và TC.

1) Chứng minh rằng tứ giác APEB nội tiếp.

2) Gọi giao điểm thứ hai của AE với (O) là F. Lấy G thuộc (O) sao cho FG song song với AC. Chứng minh rằng $\widehat{ATG} = \widehat{TAF}$.

3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, D là giao điểm của AH và BC. M là trung điểm BC. K đối xứng với A qua BC. N thuộc đường thẳng AM sao cho KN song song với HM. Lấy S thuộc BC sao cho $NS \perp NK$. Dựng R thuộc tia AK sao cho $AR \cdot AH = AD^2$. Q là điểm sao cho $PQ \perp AS$ và $SQ \perp AO$. Chứng minh rằng điểm đối xứng của A qua QR thuộc đường tròn đường kính DN.

Câu 4 (1 điểm). Viết 100 số nguyên dương đầu tiên 1,2,...,100 vào một bảng ô vuông kích thước 10×10 một cách tùy ý sao cho mỗi ô vuông được viết đúng một số. Chứng minh rằng tồn tại hai ô kề nhau (hai ô có cạnh chung) mà hai số được viết ở hai ô này có hiệu lớn hơn hoặc bằng 10.

PHẦN LỜI GIẢI

Câu 1: (3,0 điểm):

1) Điều kiện: $0 \leq x < 5$. Ta biến đổi phương trình thành

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{4x+6} + 4x + 6 = 4x + 4\sqrt{x}\sqrt{5-x} + 5 - x$$

Sử dụng hằng đẳng thức, ta thu được

$$(\sqrt{x} + \sqrt{4x+6})^2 = (2\sqrt{x} + \sqrt{5-x})^2$$

Suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{4x+6} = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ (do từng vế đều không âm), hay

$$\sqrt{4x+6} = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$$

Bình phương hai vế của phương trình này ta có

$$4x + 6 = x + 5 - x + 2\sqrt{x(5-x)}$$

Hay $4x + 1 = 2\sqrt{x(5-x)}$. Tiếp tục hay Tiếp tục ta bình phương hai vế với điều kiện $4x + 1 \geq 0$ (đã thỏa mãn được)

$$16x^2 + 8x + 1 = 4x(5-x)$$

Giải phương trình trên ta thu được $x = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{1}{10}$ (đều thỏa mãn điều kiện).

Vậy, phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{10}$

2) Đặt $S = x + y, P = xy$. Ta có

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = S^3 - 3SP$$

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} SP = 30 \\ S^3 - 3SP = 30 + \sqrt[3]{S+120} \end{cases}$$

Thay $SP = 30$ vào phương trình thứ hai ta có

$$S^3 = 120 + \sqrt[3]{S+120}$$

hay $S^3 + S = (S + 120) + \sqrt[3]{S+120}$ Ta nhận thấy

Nếu $S > \sqrt[3]{S+120}$ thì $S^3 > S + 120$, suy ra

$$S^3 + S > (S + 120) + \sqrt[3]{S+120}$$

loại.

Nếu $S < \sqrt[3]{S+120}$ thì $S^3 < S + 120$ suy ra

$$S^3 + S < (S + 120) + \sqrt[3]{S+120}$$

loại.

Như vậy ta có $S = \sqrt[3]{S+120}$, hay $S^3 - S - 120$ Giải phương trình ta thu được $S = 5$ khi
đó $P = \frac{30}{S} = 6$. Vậy ta có

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Theo Vi-ét đảo thì x, y là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Giải phương trình ta được $(x, y) = (2, 3), (3, 2)$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x, y) là $(2, 3)$ và $(3, 2)$

Câu 2 : (3,0 điểm):

1) **Cách 1.** Ta có các biến đổi phương trình sau

$$4^x + (1 + 3^y)(1 + 7^y) = 2^x(3^y + 7^y + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 1 + 2 + 3^y + 7^y + 21^y = 2^x(3^y + 7^y + 2)$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)(3^y + 7^y + 1 - 2^x) = 21^y \quad (1)$$

Ta chứng minh UCLN $(2^x - 1; 3^x + 7^y + 1 - 2^x) = 1$. Thật vậy, nếu UCLN $(2^x - 1; 3^x + 7^y + 1 - 2^x) > 1$ thì gọi p là ước nguyên tố chung của $2^x - 1, 3^x + 7^y + 1 - 2^x$. Suy ra $p \mid 3^y + 7^y$. chú ý là $3^y + 7^y$ đều không chia hết cho 3, 7 nên $p \neq 3, 7$. Lại có $p \mid 21^y$ nên $p \in \{3, 7\}$ mâu thuẫn.

Vậy UCLN $(2^x - 1; 3^x + 7^y + 1 - 2^x) = 1$ Ta xét hai trường hợp sau

- Nếu x là số chẵn thì $2^x - 1$ chia hết cho 3 và $3^x + 7^y + 1 - 2^x$ chia 3 dư 1.

Khi đó, từ phương trình (1) ta có

$$\begin{cases} 2^x - 1 = 3^y \\ 3^x + 7^y + 1 - 2^x = 7^y \end{cases}$$

Suy ra $2^x = 3^y + 1$, Chú ý là $3^y \equiv 1, 3 \pmod{8}$ nên $3^y + 1$ không chia hết cho 8. Từ đó $x = 2$ và $y = 1$. . Vậy $(x, y) = (2, 1)$

- Nếu x là số lẻ thì $2^x - 1$ chia 3 dư 1 và $3^x + 7^y + 1 - 2^x$ chia hết cho 3.

Khi đó, từ phương trình (1) ta có

$$\begin{cases} 2^x - 1 = 7^y \\ 3^x + 7^y + 1 - 2^x = 3^y \end{cases}$$

Suy ra $2^x = 7^y + 1$. Về phải chia 7 dư 1 nên về trái chia 7 dư 1. Từ đó $x = 3k, k \in \mathbb{N}^*$ và thay vào phương trình được

$$(2^k - 1)(2^{2k} + 2^k + 1) = 7^y$$

Vì UCLN $(2^k - 1; 2^{2k} + 2^k + 1) \in \{1, 3\}$ nên $\text{UCLN}(2^k - 1; 2^{2k} + 2^k + 1) = 1$. Vì $2^{2k} + 2^k + 1 > 1$ nên $2^k - 1 = 1$ suy ra $k = 1$ và $7^y = 7$ nên $y = 1$ và $x = 3k = 3$. Vậy $(x, y) = (3, 1)$.

Vậy tất cả các cặp số (x, y) thỏa mãn là $(2, 1), (3, 1)$.

Cách 2. Phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$(2^x - 7^y - 1)(2^x - 3^y - 1) = 0$$

Tôi đây giải giống hai trường hợp ở trên.

2) Ta có $3(x^{14} - x^6 + 3) = (3x^{14} + 4) - 3x^6 + 5 \geq 7x^6 - 3x^6 + 5 = 4x^6 + 5$

theo bất đẳng thức AM-GM. Lại có cũng theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$$4x^6 + 5 = (x^6 + x^6 + 1) + (x^6 + x^6 + 1) + 3 \geq 3(x^4 + x^4 + 1) \geq 3(x^4 + 2x^2)$$

Suy ra

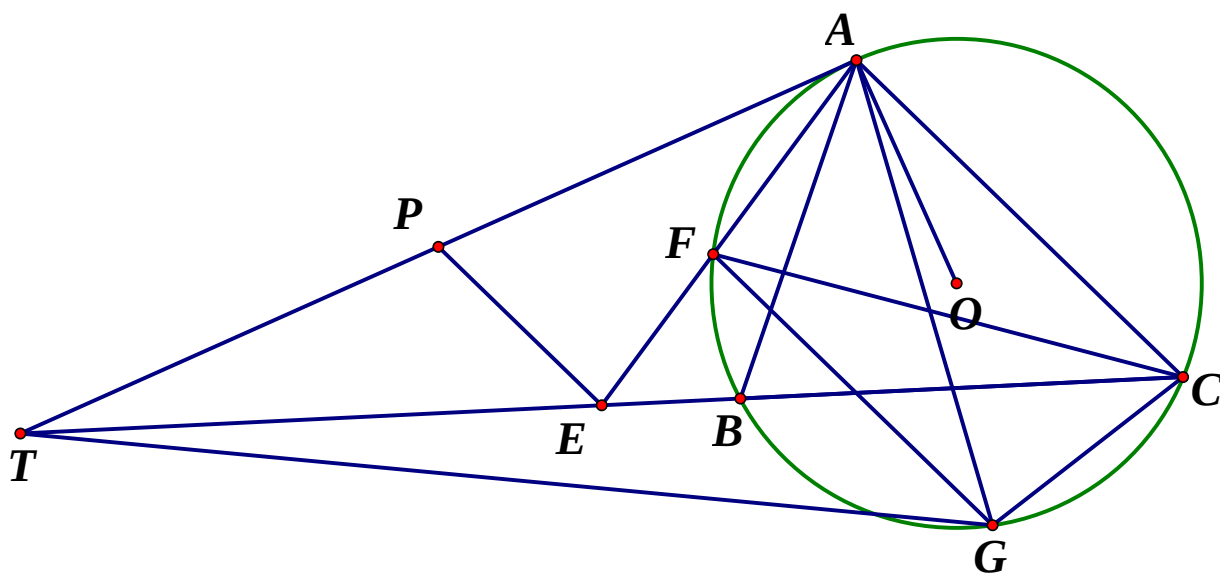
$$M \geq \sum \frac{x^4}{x^2 y^2 + xz + yz} + 2 \sum \frac{x^2}{x^2 y^2 + xz + yz}$$

và áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu cho về trái, ta có

$$M \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2(x + y + z)^2}{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + 2(xy + yz + zx)} \geq \frac{3(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) + 6(xy + yz + zx)}{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + 2(xy + yz + zx)} = 3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ Giá trị nhỏ nhất của M là 3.

Câu 3 : (3,0 điểm)



1) Vì AT là tiếp tuyến của nên ta được $TA^2 = TB.TC$. Như vậy, ta được

$$TP.TA = \frac{1}{2}TA^2 = \frac{1}{2}TB.TC = TB.TE \text{ và vì tứ giác APEB là tứ giác nội tiếp.}$$

2) Vì EP là đường trung bình của ΔTAC , ΔFGC là hình thang cân và AT là tiếp tuyến của (O) nên ta thu được $\widehat{AEP} = \widehat{EAC} = \widehat{FAC} = \widehat{GCA} = \widehat{TAC}$ và $\widehat{GAC} = \widehat{FCA} = \widehat{TAF} = \widehat{PAE}$. Như vậy, ta được $\Delta AEP \sim \Delta ACG$ (g-g) và dẫn đến $\frac{AE}{AC} = \frac{AP}{AG}$. Lại chú ý $AT = 2AP$ và

$$AC = 2EP, \text{ ta thu được } \frac{AE}{EP} = \frac{2AE}{AC} = \frac{2AP}{AG} = \frac{AT}{AG}. \text{ Kết hợp với } \widehat{AEP} = \widehat{TAC} \text{ ta thu được}$$

$$\Delta AEP \sim \Delta TAG \text{ (C.G.C) và vì thế } \widehat{ATG} = \widehat{TAF}.$$

3) ta xét bổ đề sau:

ΔABC , đường thẳng qua B vuông AC cắt AC, (ABC) tại F, D. E thuộc (ABC) thỏa $DE \parallel AC$. Đường thẳng qua E vuông EF cắt BF tại G, đg thẳng qua B vuông AG cắt đường thẳng qua C vuông AD tại H, L trung điểm AH. CMR $\angle AEL = 90^\circ$

Giải: BH giao EG tại J khi đó J thuộc (BFE). Mặt khác gọi K trung điểm BC thì F, K, J thẳng do $\angle BFK = \angle ABE = \angle BEJ = \angle BFJ$. Mà do FK vuông AD vuông CH nên J là trung điểm BH $\Rightarrow$ JL $\parallel$ AB nên L thuộc EG $\Rightarrow$ đpcm

Quay lại bài toán: Dựng hình DKNG, DS' là đg kính của (ADG) khi đó $\angle KS'D = \angle AS'D = \angle AGD = \angle DNK \Rightarrow$ S trùng S'. NG giao BC tại F, NE vuông AD tại E. Khi đó A, F, E, G cùng thuộc 1 đg tròn ($EF = DN = AG$)

• Đường thẳng qua E vuông AF cắt đg thẳng qua T vuông AS tại J. Khi đó theo bổ đề, trung điểm Q' của AJ thuộc SG (để ý T thuộc (AFGE)). Mà Q'P vuông AS $\Rightarrow$ Q' trùng Q. Hơn nữa biến đổi tỉ số cho ta R là trung điểm AE nên QR $\parallel$ JE vuông AF kết hợp thêm nếu cho JE cắt AF tại A' thì A' thuộc (EF) hay A' thuộc (DN) nên ta có đpcm.

Câu 4: (1,0 điểm):

Lời giải. Cách 1. Ta giải bài toán tổng quát: Điền các số $1, 2, \dots, n^2$ với $n > 1$ vào các ô vuông của bảng cỡ $n \times n$ Khi đó tồn tại hai ô vuông kề nhau (chung cạnh) chứa hai số x, y mà $|x - y| \geq n$ Ký hiệu m_k, M_k tương ứng là số nhỏ nhất và số lớn nhất của hàng thứ k với $k = 1, 2, \dots, n$. Chú ý là $m_1, m_2, \dots, m_n, M_1, M_2, \dots, M_n$ đôi một phân biệt. Đặt

$$m = \max(m_1, m_2, \dots, m_n) \text{ và } M = \min(M_1, M_2, \dots, M_n).$$

Xét hai trường hợp

- Nếu $m < M$ thì ta có $m_k \leq m \leq M_k$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. Điều này suy ra với hàng k bất kỳ thì tồn tại hai số $a_k \leq m < b_k$ và với mỗi hàng k ta chọn cặp (a_k, b_k) thuộc hai ô kề nhau ở hàng k . Vì $b_1, b_2, \dots, b_n$ lớn hơn m và các số $b_1, b_2, \dots, b_n$ là đôi một phân biệt nên tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $b_k \geq m + n$ và do đó

$$b_k - a_k \geq (m + n) - m = n.$$

- Nếu $m > M$ thì gọi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ là các chỉ số sao cho $m_i > M = M_j$. Khi đó tại mỗi cột luôn tồn tại các số không vượt quá M (ví dụ như số hàng j) và các số lớn hơn M (ví dụ như số ở hàng i). Khi đó với cột k bất kỳ tồn tại a_k, b_k sao cho $a_k \leq M < b_k$ và a_k, b_k thuộc hai ô kề nhau của cột k . Tương tự như trường hợp đầu tiên thì ta cũng có tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mà $b_k \geq M + n$. Suy ra

$$b_k - a_k \geq (M + n) - m = n.$$

Trong mọi tình huống ta đều có điều phải chứng minh.

Cách 2. Giả sử phản chứng, tồn tại cách điền để không tồn tại x, y như vậy. Ta lần lượt điền các số bắt đầu từ 1 vào bảng ô vuông, xét thời điểm đầu tiên mà cả n cột đều đã được điền số. Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu tồn tại cột nào đó đã được phủ hoàn toàn, ta sẽ đổi vai trò của hàng và cột (xét thời điểm đầu tiên cả n hàng đều có số). Nếu khi đó lại tồn tại một hàng được phủ hoàn toàn, thì tức là hai thời điểm đang xét trùng nhau. Điều này là không thể vì ô vừa được thêm phải là ô cuối cùng của hàng và cột đó, xét thời điểm ngay trước đó cho ta tất cả các hàng đều đã được điền.
- Nếu không tồn tại cột đã phủ hoàn toàn, do mỗi cột đều có ô đã điền, ta có thể chọn ra ở cột thứ i được cặp ô A_i, B_i mà A_i được điền còn B_i thì chưa.

Cần có $B_i - A_i \leq n - 1$ kéo theo $B_i \leq \max(A_1, A_2, \dots, A_n) + n - 1, \forall i$

Mà các số từ 1 đến $\max(A_i)$ đều đã được điền nên $B_i > \max(A_i)$, vô lý do n số B_i phân biệt.

Các trường hợp cho ta giả sử sai và ta có điều phải chứng minh.