

Câu 1 (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Chứng minh: $P \geq 4$.

Câu 2 (2,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2 + x - m^2 = 0$ (m là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Tính giá trị của $P = \frac{x_2^2 + 2x_2 + x_1 + 2x_1x_2}{x_1^2 - x_2}$.

Câu 3 (1,0 điểm)

Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + \sqrt{x^2 - 2x + 17} = 3$.

Câu 4 (2,5 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$.

a) Chứng minh: $\triangle ABD$ đồng dạng $\triangle MBC$.

b) Chứng minh: $AB \cdot CD = BD \cdot AM$.

c) Chứng minh: $AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot AC$.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho n, m là các số tự nhiên và $n^4 + m^4$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia $n^{2025} + m^{2025}$ cho 5.

Câu 6 (1,0 điểm)

Cho a, b là các số thực dương sao cho: $\frac{a-b}{3a+b} = \frac{b^2}{a^2+b^2+ab}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + 2ab + a + 2}{2b + a + 1}$.

Câu 7 (1,0 điểm)

Trên hình vẽ minh họa, các điểm A, B là vị trí hai hòn đảo và đường thẳng DC là bờ biển. Biết rằng khoảng cách giữa hai đảo là $AB = 130\text{km}$. Khoảng cách từ đảo A đến bờ biển là $AD = 70\text{km}$, khoảng cách từ đảo B đến bờ biển là $BC = 20\text{km}$.

Trên bờ biển, người ta thiết kế một trạm trung chuyển E . Tàu hàng di chuyển theo hành trình đi từ A đến E rồi đi từ E đến B . Vị trí trạm trung chuyển E phải cách vị trí C bao nhiêu km để hành trình của tàu hàng là ngắn nhất?

