
HSG 9 Tỉnh BÌNH ĐỊNH 2021-2022

Câu 1. (6,0 điểm)

1. Cho $a > 0$ thỏa mãn điều kiện: $4a^2 + \sqrt{2}(a-1) = 0$. Tính $T = \frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1-a^2}}$.

2. Giải phương trình: $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2+7x+10}) = 3$.

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Cho các số thực $a \geq 2; b \geq 5; c \geq 5$ thỏa mãn $2a^2 + b^2 + c^2 = 69$. Chứng minh rằng $12a + 13b + 11c \geq 155$.

2. Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{x^3+x}{xy-1}$ là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương z sao cho $x + y + z = xyz$.

Câu 3. (6,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Các đường thẳng CH, BH cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm thứ hai là G và P . Đường thẳng GD cắt (O) tại điểm K khác G .

a) Chứng minh $EF \parallel GP$.

b) Chứng minh đường thẳng AK đi qua trung điểm M của DE .

c) Gọi N là trung điểm DF , AN cắt (O) tại điểm L khác A . Chứng minh bốn điểm M, L, N, K cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho 2022 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng những điểm này có thể phân thành 1011 cặp (mỗi cặp gồm 2 điểm) sao cho các đoạn thẳng nối hai điểm của mỗi cặp điểm này không cắt nhau.

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (6,0 điểm)

1. Cho $a > 0$ thỏa mãn điều kiện: $4a^2 + \sqrt{2}(a-1) = 0$. Tính $T = \frac{a+1}{\sqrt{a^4 + a + 1 - a^2}}$.

2. Giải phương trình: $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3$

Lời giải

1.

$$\text{Từ } 4a^2 + \sqrt{2}(a-1) = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{\sqrt{2}(1-a)}{4} \Leftrightarrow a^4 = \frac{a^2 - 2a + 1}{8} \text{ (với } 0 < a \leq 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= \frac{a+1}{\sqrt{a^4 + a + 1 - a^2}} = \sqrt{a^4 + a + 1 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2 - 2a + 1}{8} + a + 1 + \frac{\sqrt{2}(1-a)}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + 6a + 9}{8}} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}} = \frac{a+3}{2\sqrt{2}} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } T = \sqrt{2}.$$

2.

Cách 1:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2 + 7x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -2 \\ x \leq -5 \vee x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2.$$

$$\text{Khi đó } (\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}) > 0$$

Nhân hai vế của phương trình đã cho với $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}$, ta được:

$$(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2})(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+2})(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2})$$

$$\Leftrightarrow 3(1 + \sqrt{x^2 + 7x + 10}) = 3(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2})$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{(x+5)(x+2)} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{x+5}) + \sqrt{x+2}(\sqrt{x+5} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{x+5}) - \sqrt{x+2}(1 - \sqrt{x+5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{(x+5)})(1 - \sqrt{x+2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x+5} = 0 \\ 1 - \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = 1 \\ x+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \text{ (KTMĐK)} \\ x = -1 \text{ (TMĐK)} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -1$.

Cách 2:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2 + 7x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -2 \\ x \leq -5 \vee x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2.$$

$$\text{Đặt: } a = \sqrt{x+5}; b = \sqrt{x+2} \text{ (} a > b \geq 0 \text{ và } a \geq \sqrt{3})$$

$$\text{Ta có: } a^2 - b^2 = (\sqrt{x+5})^2 - (\sqrt{x+2})^2 = 3 \text{ và } ab = \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{x^2 + 7x + 10}.$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}
 (a-b)(1+ab) &= a^2 - b^2 \Leftrightarrow a + a^2b - b - ab^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a-b) + ab(a-b) = (a-b)(a+b) \\
 &\Leftrightarrow (a-b)(1+ab) = (a-b)(a+b) \Leftrightarrow (a-b)(1+ab-a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(b-1)(a-1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow b-1=0 \text{ (do } a > b \geq 0 \text{ và } a \geq \sqrt{3}) \\
 &\Leftrightarrow b=1 \text{ hay } \sqrt{x+2}=1 \Leftrightarrow x=-1 \text{ (TMĐK)}
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -1$.

Bài 2. (5,0 điểm)

1. Cho các số thực $a \geq 2; b \geq 5; c \geq 5$ thỏa mãn $2a^2 + b^2 + c^2 = 69$. Chứng minh rằng $12a + 13b + 11c \geq 155$.

2. Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{x^3 + x}{xy - 1}$ là số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương z sao cho $x + y + z = xyz$.

Lời giải

1.

Cách 1:

Đặt $a = x + 2; b = y + 5; c = z + 5$ ($x, y, z \geq 0$) thay vào $2a^2 + b^2 + c^2 = 69$, ta được:

$$2(x+2)^2 + (y+5)^2 + (z+5)^2 = 69 \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 10z = 11 \quad (*)$$

Nếu một trong hai số y, z tồn tại một số lớn hơn 1 thì $VT_{(*)} > 11$ (vô lý).

Do đó $0 \leq y, z \leq 1$.

Ta lại có $2a^2 + b^2 + c^2 = 69 \Leftrightarrow 2a^2 = 69 - b^2 - c^2$

$$\Rightarrow 2a^2 \leq 19 \text{ (với } a \geq 2; b \geq 5; c \geq 5) \Rightarrow a < 4 \Rightarrow x < 2 \text{ hay } 0 \leq x < 2.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Khi đó } 12a + 13b + 11c &= 12x + 13y + 11z + 144 = 144 + (8x + 10y + 10z) + 4x + 3y + z \\
 &= 144 + (11 - 2x^2 - y^2 - z^2) + 4x + 3y + z = 155 + 2x(2-x) + y(3-y) + z(1-z) \geq 155.
 \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} 2x(2-x) = 0 \\ y(3-y) = 0 \\ z(1-z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \text{ (do } 0 \leq x < 2; 0 \leq y, z \leq 1)$$

Thử lại: Với $x = 0; y = 0; z = 1$ thì $a = 2; b = 5; c = 6$ thỏa mãn $2a^2 + b^2 + c^2 = 69$.

$$\text{Khi đó } 12a + 13b + 11c = 12 \cdot 2 + 13 \cdot 5 + 11 \cdot 6 = 155.$$

Vậy $12a + 13b + 11c \geq 155$, với $a \geq 2; b \geq 5; c \geq 5$ thỏa mãn $2a^2 + b^2 + c^2 = 69$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2; b = 5; c = 6$.

Cách 2:

$$\text{Từ } 2a^2 + b^2 + c^2 = 69 \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = 69 - b^2 - c^2 \\ b^2 = 69 - 2a^2 - c^2 \\ c^2 = 69 - 2a^2 - b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 4 \\ b \leq 6 \\ c \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 4 \\ b < 8 \\ c \leq 6 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (a-2)(a-4) \leq 0 \\ (b-5)(b-8) \leq 0 \\ (c-5)(c-6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 12a + 16 \leq 0 \\ b^2 - 13b + 40 \leq 0 \\ c^2 - 11c + 30 \leq 0 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$2a^2 + b^2 + c^2 - (12a + 13b + 11c) + 86 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 12a + 13b + 11c \geq 2a^2 + b^2 + c^2 + 86 \geq 155 \text{ (với } 2 \leq a < 4; 5 \leq b < 8; 5 \leq c \leq 6).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 2; b = 5; c = 6$.

Thử lại: Với $a = 2; b = 5; c = 6$ thỏa mãn $2a^2 + b^2 + c^2 = 69$.

Khi đó $12a + 13b + 11c = 12.2 + 13.5 + 11.6 = 155$.

Vậy bài toán đã được chứng minh.

2.

Cách 1:

Ta có x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{x^3 + x}{xy - 1}$ là số nguyên dương.

$$\text{Nên } \frac{(x^3 + x)y^2}{xy - 1} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{x^2y(xy - 1) + x^2y + xy^2}{xy - 1} \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow x^2y + \frac{x(xy - 1) + y(xy - 1) + x + y}{xy - 1} \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow x^2y + x + y + \frac{x + y}{xy - 1} \in \mathbb{N}^*$$

Từ giả thiết x, y là các số nguyên dương, suy ra $\frac{x + y}{xy - 1} \in \mathbb{N}^*$.

Do đó tồn tại số nguyên dương z sao cho $z = \frac{x + y}{xy - 1}$.

Suy ra $z(xy - 1) = x + y$ hay $xyz = x + y + z$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Cách 2:

Vì $\frac{x^3 + x}{xy - 1}$ và x, y đều là số nguyên dương nên $(x^3 + x):(xy - 1) \Leftrightarrow x(x^2 + 1):(xy - 1)$.

Ta lại có $(x; xy - 1) = 1$ nên

$$x^2 + 1:xy - 1 \Rightarrow x^2 + 1 + xy - 1:xy - 1 \Rightarrow x(x + y):xy - 1 \Rightarrow x + y:xy - 1$$

Mà $x + y$ và $xy - 1$ là các số nguyên dương.

Do đó tồn tại số nguyên dương z sao cho $x + y = z(xy - 1) \Leftrightarrow x + y + z = xyz$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 3. (6,0 điểm)

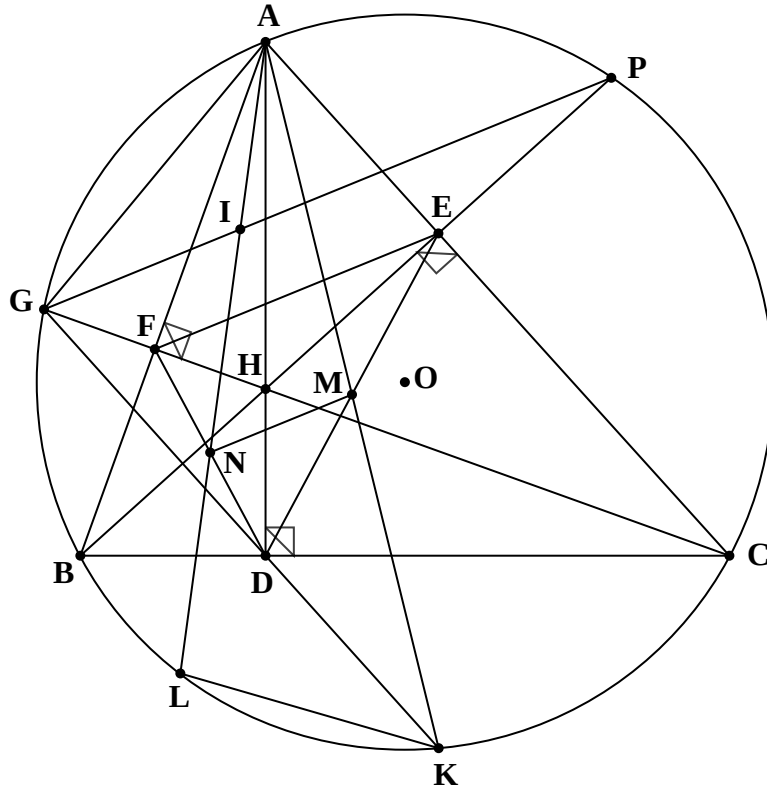
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có ba đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Các đường thẳng CH, BH cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm thứ hai là G và P . Đường thẳng GD cắt (O) tại điểm K khác G .

a) Chứng minh $EF \parallel GP$.

b) Chứng minh đường thẳng AK đi qua trung điểm M của DE .

c) Gọi N là trung điểm DF , AN cắt (O) tại điểm L khác A . Chứng minh bốn điểm M, L, N, K cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



a) Chứng minh $EF \parallel GP$.

Xét tứ giác $BCEF$ có: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ (giả thiết), mà hai góc này cùng nhìn cạnh BC

$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BCG} = \widehat{BEF}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

mà $\widehat{BCG} = \widehat{BPG}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BG của đường tròn (O))

Suy ra $\widehat{BEF} = \widehat{BPG}$

$\Rightarrow EF \parallel GP$ (đpcm)

b) Chứng minh đường thẳng AK đi qua trung điểm M của DE .

Xét tứ giác $CDHE$, có: $\widehat{HEC} = 90^\circ, \widehat{HDC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CDHE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{HCD}$ (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{AEM} = \widehat{AEB} + \widehat{HED} = 90^\circ + \widehat{HED} \\ \widehat{GHD} = \widehat{CDH} + \widehat{HCD} = 90^\circ + \widehat{HCD} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{GHD}$ (3)

Tứ giác $BFHD$ nội tiếp (vì $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$)

$\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{FBH}$

mà $\widehat{FBH} = \widehat{FCE}$ (vì tứ giác $BCEF$ nội tiếp)

$\widehat{HDE} = \widehat{FCE}$ (vì tứ giác $DCEH$ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{FDH} = \widehat{HDE}$ (4)

Lại có, tứ giác $ACDF$ nội tiếp (vì $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, hai góc này cùng nhìn cạnh AC)

$\Rightarrow \widehat{HFD} = \widehat{EAD}$ (5)

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \Delta AED \sim \Delta FHD \Rightarrow \frac{HF}{HD} = \frac{EA}{ED} = \frac{EA}{2MD} \Rightarrow \frac{2HF}{HD} = \frac{EA}{MD} \quad (6)$$

Vì $\widehat{BAG} = \widehat{BCG} = \widehat{BAD} \Rightarrow AF$ là đường phân giác của $\widehat{HAG}$; mà AF là đường cao của tam giác HAG nên AF là đường trung tuyến tam giác $HAG \Rightarrow FH = FG$ hay $HG = 2HF$ (7)

$$\text{Từ (6) và (7) suy ra } \frac{HG}{HD} = \frac{EA}{MD} \quad (8)$$

Từ (3) và (8) suy ra $\Delta AEM \sim \Delta GHD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{KGC}$$

mà $\widehat{KGC} = \widehat{KAC}$ (cùng chắn cung KC của đường tròn (O))

$\Rightarrow AM \equiv AK$ hay đường thẳng AK đi qua trung điểm M của DE .

c) Chứng minh bốn điểm M, L, N, K cùng thuộc một đường tròn.

Gọi I là giao điểm của GP và AL

Ta có MN là đường trung bình của $\Delta FED \Rightarrow MN \parallel EF \parallel GP$

$$\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{AIP} = \frac{1}{2}(\widehat{AP} + \widehat{GBL}) \quad (9)$$

$$\text{Vì } \widehat{AKL} \text{ là góc nội tiếp đường tròn } (O) \text{ nên } \widehat{AKL} = \frac{1}{2} \widehat{AGL} = \frac{1}{2}(\widehat{AG} + \widehat{GBL}) \quad (10)$$

$$\text{Vì } \widehat{EBF} = \widehat{ECF} \text{ (do tứ giác } BCEF \text{ nội tiếp)} \Rightarrow \widehat{PBA} = \widehat{ACG} \Rightarrow \widehat{AP} = \widehat{AG} \quad (11)$$

Từ (9), (10) và (11) suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{AKL} \Rightarrow$ Tứ giác $MNLK$ nội tiếp hay bốn điểm M, L, N, K cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho 2022 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng những điểm này có thể phân thành 1011 cặp (mỗi cặp gồm 2 điểm) sao cho các đoạn thẳng nối hai điểm của mỗi cặp điểm này không cắt nhau.

Lời giải

Ta chia 2022 điểm đã cho thành 1011 cặp điểm tùy ý, nối chúng lại với nhau ta được 1011 đoạn thẳng.

Gọi S là tổng độ dài các đoạn thẳng đã được nối (chú ý rằng, do chúng ta có hữu hạn cách phân cặp nên tập giá trị của S là hữu hạn). Nếu có hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại (O) thì ta thay AB, CD bằng AC, BD và khi đó:

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AO + OB) + (CO + OD) \\ &= (AO + OC) + (BO + OD) \\ &> AC + BD \text{ (do bất đẳng thức tam giác)} \end{aligned}$$

Vậy nếu có cặp đoạn thẳng nào đó cắt nhau thì ta có thể nối cách khác để tổng S giảm đi. Vì S hữu hạn nên một lúc nào đó quá trình này phải dừng lại và khi đó không có hai đoạn thẳng nào cắt nhau. Vậy bài toán được chứng minh.

---Hết---

Quy định khi gõ lời giải:

1. Phông chữ: Times New Roman, cỡ chữ 12
2. Công thức gõ trên mathtype, cỡ chữ 12.
3. Hình vẽ được vẽ trên các phần mềm: geogebra; Geometer's Sketchpad
4. Tên file: stt+ hsg+ tên tỉnh. Ví dụ: 1.hsg An Giang.docx