

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{2x-2\sqrt{x(x-1)}}-1+2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+1}{x\sqrt{x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho P nhận giá trị nguyên.

Bài 2. a) Giải phương trình $(\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x})\sqrt{2x^2+18}-5x+15=0$.

b) Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $|a+b+c-2024|+\sqrt{2024(ab+bc+ca)}-abc=0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}$.

Bài 3. a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 2023^2$ chia hết cho 24.

b) Một mảnh vườn hình vuông được chia thành lưới gồm 25×25 ô vuông nhỏ bằng nhau để trồng 25 loài hoa khác nhau. Trong mỗi ô vuông nhỏ được trồng đúng một loài hoa và các loài được trồng đối xứng nhau qua đường chéo chính của mảnh vườn (là đường nối từ đỉnh trên bên trái với đỉnh dưới bên phải). Biết không có hai ô vuông nhỏ nào trên cùng một cột trong cùng loài hoa.

Chứng minh rằng các loài hoa được trồng ở các ô vuông nhỏ có đường chéo chính đi qua là khác nhau.

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB), M là điểm tùy ý trên cạnh BC (M khác B, C, D). Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBF và đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE.

a) Chứng minh rằng tứ giác AFNE nội tiếp.

b) Chứng minh rằng AM đi qua điểm N.

c) Vẽ đường kính MP của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBF và đường kính MQ của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE. Chứng minh rằng các điểm P, H, N, Q thẳng hàng.

Bài 5. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.