

Câu 1. (2,00 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}-1}}{3-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1; b^2 - 3bc + 4c^2 = 2$ và $c^2 + 3ca - a^2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^4 + b^4 + c^4$

Câu 2. (2,00 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng $d: y = mx + m + 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt trục hoành tại điểm A , trục tung tại điểm B và tạo thành tam giác OAB có diện tích bằng 2 (O là gốc tọa độ)

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 - 6x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \\ \frac{1}{x^2 - 12y + 4} - \frac{1}{x^2 - 4y + 4} = \frac{1}{30y} \end{cases}$$

Câu 3. (1,50 điểm)

a) Chứng minh $2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$ với mọi số thực $x \geq 0$

b) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa $\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $Q = \frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1-y}{1-y+y^2} + \frac{1-z}{1-z+z^2} + 2022$

Câu 4. (2,50 điểm) Cho tam giác nhọn ABC không cân đỉnh C nội tiếp đường tròn (O) . Gọi d_1 và d_2 tương ứng là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B , các tiếp tuyến này cắt nhau tại D . Gọi E là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng DC

a) Chứng minh năm điểm A, O, E, B, D cùng thuộc một đường tròn

b) Một đường thẳng d qua C và song song với AB cắt d_1 tại F . Chứng minh

$$\triangle DAC \sim \triangle DEF$$

c) Gọi K là trung điểm của AC . Chứng minh ba điểm E, F, K thẳng hàng

Câu 5. (2,00 điểm)

a) Bên trong một tam giác đều cạnh bằng 4 cho năm điểm. Chứng minh rằng trong 5 điểm đó có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2

b) Cho các số tự nhiên a, b, c thỏa $2a^2 + 3b^3 = 4c^4$. Chứng minh a, b, c đều chia hết cho 6

c) Một tập hợp S được gọi là có tính chất T nếu S có đúng bốn phần tử và với mọi phần tử x của S thì ít nhất một trong hai phần tử $x-1$ hoặc $x+1$ thuộc S

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$. Tính số tất cả các tập con có tính chất T (nêu trên) của tập X

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,00 điểm)

c) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}-1}}{3-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}$

$$\frac{\sqrt{6\sqrt{6-4\sqrt{2}}-1}}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}-1}}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6(2-\sqrt{2})}-1}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{3-\sqrt{2}} = 1$$

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3} = \sqrt{3}+1; \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

$$\Rightarrow A = 2$$

d) Cho các số thực a, b, c thỏa $2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1; b^2 - 3bc + 4c^2 = 2$ và $c^2 + 3ca - a^2 = 3$. Tính giá trị của biểu thức $B = a^4 + b^4 + c^4$

Ta có :

$$\begin{cases} 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1 \\ b^2 - 3bc + 4c^2 = 2 \\ c^2 + 3ca - a^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1 \\ b^2 - 3bc + 4c^2 = 2 \\ -c^2 - 3ca + a^2 = -3 \end{cases} \rightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 3(ab + bc + ca) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 3ab + 2b^2 = 1 \\ b^2 - 3bc + 4c^2 = 2 \\ c^2 + 3ca - a^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow B = 3$$

Câu 2. (2,00 điểm)

c) Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng $d: y = mx + m + 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để d cắt trục hoành tại điểm A , trục tung tại điểm B và tạo thành tam giác OAB có diện tích bằng 2 (O là gốc tọa độ)

Nhận xét $m = 0, m = -1$ thì d không cắt cả hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt. Do đó $m \neq 0; m \neq -1$

Ta có $A\left(\frac{-m-1}{m}; 0\right), B(0; m+1)$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \left| \frac{-m-1}{m} \right| |m+1| ;$$

$$S_{OAB} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{-m-1}{m} \right| \cdot |m+1| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{-m-1}{m} \right| \cdot |m+1| = 4 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 4|m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 = 4m (m \geq 0) \\ m^2 + 2m + 1 = -4m (m < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy các giá trị cần tìm là $m = 1; m = -3 \pm 2\sqrt{2}$

d) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 - 6x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \\ \frac{1}{x^2 - 12y + 4} - \frac{1}{x^2 - 4y + 4} = \frac{1}{30y} \end{cases}$$

Điều kiện : $y \neq 0, x^2 - 12y + 4 \neq 0; x^2 - 4y + 4 \neq 0$

$$2x^3 - 6x^2y + 5xy^2 - 2y^3 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\frac{x}{y} - 2 = 0 \Rightarrow x = 2y$$

$$\frac{1}{x^2 - 12y + 4} - \frac{1}{x^2 - 4y + 4} = \frac{1}{30y} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 - 6x + 4} - \frac{1}{x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{15}x$$

Do $x \neq 0$, nhân 2 vế của phương trình cho x ta được :

$$\frac{1}{x + \frac{4}{x} - 6} - \frac{1}{x + \frac{4}{x} - 2} = \frac{1}{15}. \text{ Đặt } t = x + \frac{4}{x} - 6, \text{ phương trình trở thành : } \frac{1}{t} - \frac{1}{t+4} = \frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow t^2 + 4t - 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 \Rightarrow x^2 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \pm 4\sqrt{2} \\ t = -10 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(-2; -1), (6 - 4\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}), (6 + 4\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2})$

Câu 3. (1,50 điểm)

c) Chứng minh $2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$ với mọi số thực $x \geq 0$

$$2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1) \geq 0 \text{ (luôn đúng) (đpcm)}$$

d) Cho các số thực không âm x, y, z **thỏa** $\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} = \frac{3}{2}$. **Tìm giá trị nhỏ nhất**

của biểu thức $Q = \frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1-y}{1-y+y^2} + \frac{1-z}{1-z+z^2} + 2022$

$$2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2 - 3x^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2(1-x^3) \leq 3(1-x^2) \Leftrightarrow \frac{1-x^3}{1+x^3} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^3}$$

Tương tự ta có : $\frac{1-y^3}{1+y^3} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^3}; \frac{1-z^3}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1-z^2}{1+z^3}$ với mọi $y, z \geq 0$

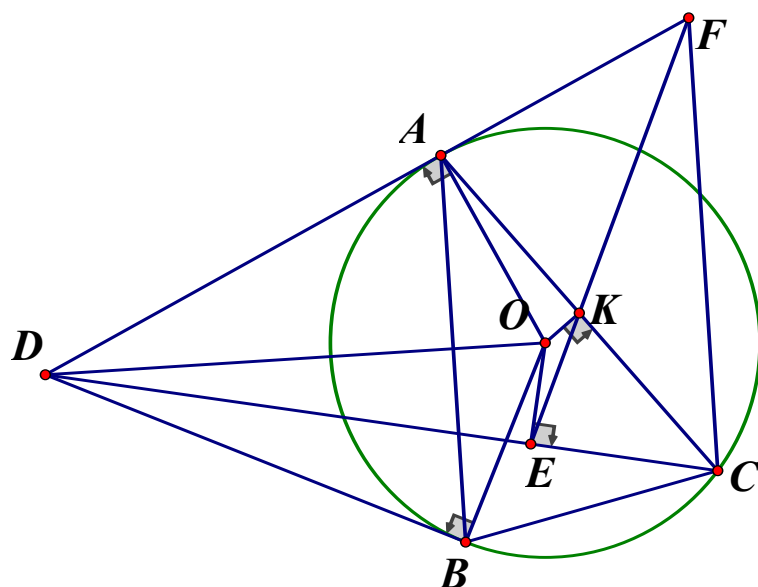
$$\frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+y^3} + \frac{1}{1+z^3} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1+y^3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1+z^3} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1+x^3} + \frac{1-y^3}{1+y^3} + \frac{1-z^3}{1+z^3} = 0$$

Theo chứng minh trên ta có :

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1-x^2}{1+x^3} + \frac{1-y^2}{1+y^3} + \frac{1-z^2}{1+z^3} \right) \geq \frac{1-x^2}{1+x^3} + \frac{1-y^3}{1+y^3} + \frac{1-z^3}{1+z^3} = 0$$

Câu 4. (2,50 điểm) Cho tam giác nhọn ABC không cân đỉnh C nội tiếp đường tròn (O) . Gọi d_1 và d_2 tương ứng là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B , các tiếp tuyến này cắt nhau tại D . Gọi E là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng DC



d) Chứng minh năm điểm A, O, E, B, D cùng thuộc một đường tròn

$\angle DAO = 90^\circ$ (DA là tiếp tuyến); $\angle DBO = 90^\circ$ (DB là tiếp tuyến)

$\Rightarrow DAOB$ là tứ giác nội tiếp

$\angle DEO = 90^\circ$ (E là hình chiếu của O lên DC) nên E thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DAOB$. Suy ra A, O, E, B, D cùng thuộc một đường tròn đường kính DO

e) Một đường thẳng d qua C và song song với AB cắt d_1 tại F. Chứng minh

$$\triangle DAC \sim \triangle DEF$$

Tứ giác $AEBD$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AED = \angle ABD$; $\angle ABD = \angle ACB$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\angle AED = \angle ABD = \angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - \angle FAC - \angle ACF = \angle AFC$

$\Rightarrow$ tứ giác $AECF$ nội tiếp nên $\angle ACE = \angle AFE \Rightarrow \angle ACD = \angle DFE$

$\Rightarrow \triangle DAC \sim \triangle DEF$

f) Gọi K là trung điểm của AC. Chứng minh ba điểm E, F, K thẳng hàng

Tứ giác $OABE$ nội tiếp nên $\angle AEO = \angle ABO = \angle OAB$

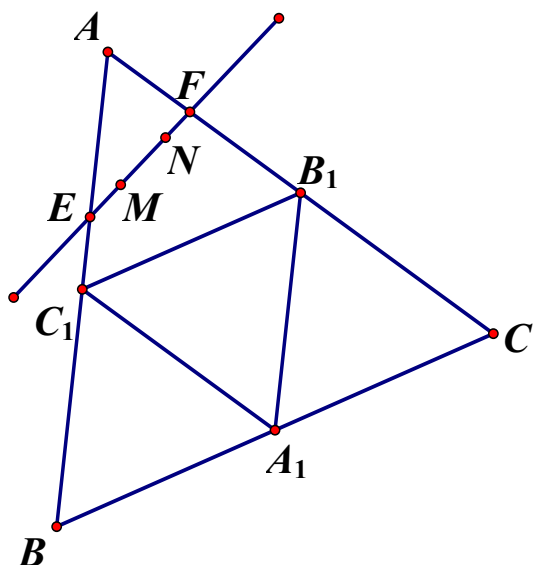
Tứ giác $OECK$ nội tiếp nên $\angle OEK = \angle OCK = \angle OAK$

$\angle AEK = \angle AEO + \angle OEK = \angle ABO + \angle OCK = \angle ABO + \angle OCA = \angle CAB = \angle ACF$

Suy ra $\angle AEK = \angle ACF = \angle AEF$ hay ba điểm E, K, F thẳng hàng

Câu 5. (2,00 điểm)

d) Bên trong một tam giác đều cạnh bằng 4 cho năm điểm. Chứng minh rằng trong 5 điểm đó có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2



Xét tam giác đều ABC , gọi C_1, A_1, B_1 lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA . Theo nguyên lý Dirichlet có 1 tam giác chứa 2 điểm, chẳng hạn đó là tam giác AB_1C_1 . Gọi hai điểm đó là M, N . Ta chứng minh $MN < 2$

Nếu cả hai điểm $M, N \in B_1C_1$ thì $MN < B_1C_1 = 2$. Ngược lại, đường thẳng MN cắt AC_1, AB_1 lần lượt tại E và F . Xét tam giác AEF , tam giác này có một góc lớn hơn hoặc bằng 60° , chẳng hạn là $\angle AFE$ (góc lớn nhất). Khi đó $MN < EF \leq AE \leq AC_1 = 2$

e) Cho các số tự nhiên a, b, c thỏa $2a^2 + 3b^3 = 4c^4$. Chứng minh a, b, c đều chia hết cho 6

Từ giả thiết suy ra b là số chẵn, đặt $b = 2b_1, b_1 \in \mathbb{N}$

$2a^2 + 3b^3 = 4c^4 \Leftrightarrow 2a^2 + 24b_1^3 = 4c^4 \Leftrightarrow a^2 + 12b_1^3 = 2c^4$. Suy ra a là số chẵn, lại đặt $a = 2a_1, a_1 \in \mathbb{N}$

Khi đó $2a^2 + 12b_1^3 = 4c^4 \Leftrightarrow 8a_1^2 + 24b_1^3 = 4c^4 \Leftrightarrow 2a_1^2 + 6b_1^3 = c^4 \Rightarrow c$ là số chẵn.

Vậy a, b, c đều chia hết cho 2

Để thấy $2a^2 + 3b^3$ chia 3 dư 0 hoặc dư 2 ($a = 3k, a = 3k \pm 1$) và $4c^4$ chia 3 dư 0 hoặc 1. Suy ra cả hai vế chia hết cho 3

$\begin{cases} 2a^2 + 3b^3 : 3 \\ 4c^4 : 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 : 3 \\ c^4 : 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a : 3 \\ c : 3 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a = 3m, m \in \mathbb{N} \\ c = 3n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Khi đó :

$2a^2 + 3b^3 = 4c^4 \Leftrightarrow 2 \cdot 9m^2 + 3b^3 = 4 \cdot 81n^4 \Leftrightarrow 2 \cdot 3m^2 + b^3 = 4 \cdot 27n^4 \Rightarrow b^3 : 3 \Rightarrow b : 3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 6

f) Một tập hợp S được gọi là có tính chất T nếu S có đúng bốn phần tử và với mọi phần tử x của S thì ít nhất một trong hai phần tử $x-1$ hoặc $x+1$ thuộc S

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$. Tính số tất cả các tập con có tính chất T (nêu trên) của tập X

Xét bài toán : Cho tập $Y = \{1; 2; 3; \dots; n\} (n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$. Gọi S là một tập con có tính chất T của Y

Xét tập con $S = \{a; b; c; d\}$, giả sử $a < b < c < d$. Khi đó $b - a \geq 1; c - b \geq 1; d - c \geq 1 \rightarrow d - a \geq 3$

$$*) a \in S \Rightarrow a + 1 \in S \Rightarrow b = a + 1$$

$$*) d \in S \Rightarrow d - 1 \in S \Rightarrow c = d - 1$$

$\Rightarrow S = \{a; a + 1; d - 1; d\}$. Do đó ta chỉ cần đếm các cặp số $(a; d)$ với $a, d \in Y$ và $d - a \geq 3$

$$*) a = 1 \Rightarrow d \text{ có } n - 3 \text{ cách chọn}$$

$$*) a = 2 \Rightarrow d \text{ có } n - 4 \text{ cách chọn}$$

.....

$$*) a = n - 3 \text{ thì } d \text{ có } 1 \text{ cách chọn}$$

Vậy tổng số tập con S của Y có tính chất T là $n - 3 + n - 4 + \dots + 2 + 1 = \frac{(n - 3)(n - 2)}{2}$

Áp dụng bài toán trên cho các trường hợp tập $X = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$, số các tập con cần tìm là
$$\frac{(2022 - 3)(2022 - 2)}{2} = \frac{2019 \cdot 2020}{2} = 2039190$$