

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: TOÁN (Ngày thứ nhất)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1. Cho m, n là các số nguyên dương phân biệt và p là số nguyên tố sao cho mn là ước của $m^2 + n^2 + pm$. Chứng minh rằng m là số chính phương hoặc mn là tổng của hai số chính phương.

Bài 2. Cho k là số nguyên, $k \neq 2$, $P(x)$ là đa thức với các hệ số hữu tỷ. Giả sử số thực a là nghiệm của phương trình $x^3 - kx + 1 = 0$ (*). Xét dãy (a_n) như sau: $a_1 = P(a)$, $a_{n+1} = P(a_n)$, $\forall n \geq 1$. Chứng minh rằng nếu a_1 là nghiệm của (*) thì a_n cũng là nghiệm của (*), $\forall n \geq 1$.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ADC, BDC . N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB . Kẻ $NL \perp CD$ ($L \in CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của OH, OK . Chứng minh rằng LN là phân giác của $\angle ILJ$.

Bài 4. Hỏi có tồn tại hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ song ánh sao cho với mọi bộ 3 số tự nhiên phân biệt a, b, c tạo thành một cấp số cộng thì $f(a), f(b), f(c)$ không tạo thành một cấp số cộng?

———— HẾT ————

DÁP ÁN (ngày 1 Vòng 1)

Bài 1. (5đ) Trước hết ta chứng minh bổ đề sau: Nếu a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 : ab$ thì $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$.
Thật vậy, giả sử $a^2 + b^2 + 1 = kab$ (1) với $k \in \mathbb{N}^*$. Gọi (a_0, b_0) là cặp số nguyên dương có tổng nhỏ nhất thỏa mãn (1) tức là $a_0^2 + b_0^2 + 1 = ka_0b_0$ và giả sử thêm rằng $a_0 \geq b_0$. Xét phương trình

$$x^2 - kb_0x + b_0^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có một nghiệm là a_0 nên còn có một nghiệm a_1 thỏa mãn $a_0 + a_1 = kb_0$ và $a_0a_1 = b_0^2 + 1$. Ta thấy a_1 nguyên và $a_1 > 0$. Suy ra (a_1, b_0) cũng là một nghiệm nguyên dương của (1). Do đó $a_1 + b_0 \geq a_0 + b_0$ hay $a_1 \geq a_0$. Nếu $a_0 \geq b_0 + 1$ thì $a_0a_1 \geq a_0^2 \geq (b_0 + 1)^2 = b_0^2 + 2b_0 + 1 > b_0^2 + 1$ - vô lý. Do đó phải có $a_0 = b_0$. Khi đó $2a_0^2 + 1 = ka_0^2$ hay $(k - 2)a_0^2 = 1$. Do đó $k - 2 = a_0^2 = 1$ hay $k = 3$. Như vậy $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$.

Trở lại bài toán: Đặt $d = (m, n)$ thì $m = da, n = db$ với $a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$. Khi đó $d^2ab | d^2a^2 + d^2b^2 + d^2$ hay $dab | da^2 + db^2 + pa$. Suy ra $db^2 : a$ mà $(a, b) = 1$ nên $d : a$. Đặt $d = ka$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $ka^3 + kab^2 + pa : ka^2b$ hay $ka^2 + kb^2 + p : kab$. Suy ra $p : k$.

Nếu $k = 1$ thì $m = da = ka^2 = a^2$ là số chính phương.

Nếu $k = p$ thì $ka^2 + kb^2 + k : kab$ hay $a^2 + b^2 + 1 : ab$. Theo bổ đề ta phải có $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$ hay $d^2a^2 + d^2b^2 + d^2 = 3d^2ab$ hay $m^2 + n^2 + d^2 = 3mn$ hay $mn = (m - n)^2 + d^2$ là tổng của hai số chính phương.

Bài 2. (5đ) Đặt $f(x) = x^3 - kx + 1$. Ta có $a_0 = a, a_1 = P(a)$ là hai nghiệm của $f(x) = 0$. Trường hợp $k = 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -1$ nên $a_1 = P(a) = -1$. Khi đó $a_n = -1$ ta có ngay đpcm.

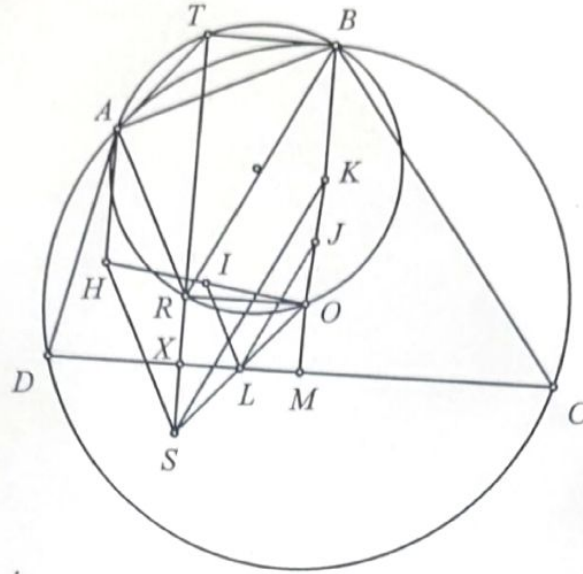
Xét trường hợp $k \neq 0$. Do $k \neq 2$ nên $f(x)$ không có nghiệm hữu tỷ. Từ đó dễ thấy $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận a là nghiệm.

Nếu $a_1 = P(a) = a$ thì $a_n = a$ nên khẳng định bài toán hiển nhiên đúng.

Xét $a_1 = P(a) \neq a$. Ta có $f(P(x)) - f(x) = (P(x) - x)Q(x)$ với $Q(x) = P(x)^2 + xP(x) + x^2 - k$ là đa thức hệ số hữu tỷ. Khi đó ta có $f(a_{n+1}) - f(a_n) = (a_{n+1} - a_n)Q(a_n), n \geq 0$. (1)

Do $a_1 = P(a) \neq a$ nên $Q(a) \neq 0$ mà $f(x)$ đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận a là nghiệm nên $f(x) \mid Q(x)$. Hơn nữa, a_1 là nghiệm của $f(x)$ nên a_1 cũng là nghiệm của $Q(x)$. Thay vào (1) suy ra a_2 là nghiệm của $f(x)$. Tiếp tục như vậy thì từ (1) suy ra $f(a_n) = 0$ với mọi $n \geq 1$, ta có đpcm.

Bài 3. (5đ)



Gọi M là trung điểm của CD . T là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (O) . Kẻ $TX \perp CD$ ($X \in CD$).

Do N là trung điểm của TO nên L là trung điểm của XM .

Dựng hình chữ nhật $ORXM$, S đối xứng với R qua X . Khi đó L là trung điểm của OS .

Ta có $AH = 2OM = RS$ nên $AHSR$ là hình bình hành, suy ra $AR \parallel HS$. Mà $HS \parallel IL$ nên $IL \parallel AR$. Tương tự, $JL \parallel BR$.

Các điểm A, B, O, R, T cùng nằm trên đường tròn đường kính OT , mà $TA = TB$ nên RT là phân giác của $\angle ARB$.

Lại có $RT \parallel LN$, $IL \parallel AR$, $JL \parallel BR$ nên LN là phân giác của $\angle ILJ$.

Bài 4. (5đ) Define function g

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 2, \quad g(2) = 1, \quad g(3) = 3$$

Assume that $n = \overline{a_1 \dots a_{k_4}}$ (base-4 representation of n). Then define

$$f(n) = \overline{g(a_1)g(a_2) \dots g(a_k)}_4.$$

The function is obviously bijective. Assume that a, b, c be an arithmetic sequence with $a + b = 2c$. Let i, j, k be their respective last digits in the base-4 representation. We have

$$i + j \equiv 2k \pmod{4} \quad f(i) + f(j) \equiv 2f(k) \pmod{4}.$$

These happens only when $i = j = k$, delete them from a, b, c , then we compare the second last digit and so on. Then we have $a = b = c$.