

Đáp án

1. Đặt $A = x_1 + x_3 + x_5 + \dots$, $B = x_2 + x_4 + x_6 + \dots$ (tương ứng là tổng các số hạng chỉ số lẻ và chẵn). Khi đó, $A + B = 2$ và do các x_i không âm, ta có

$$AB \geq x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = 1. \quad (*)$$

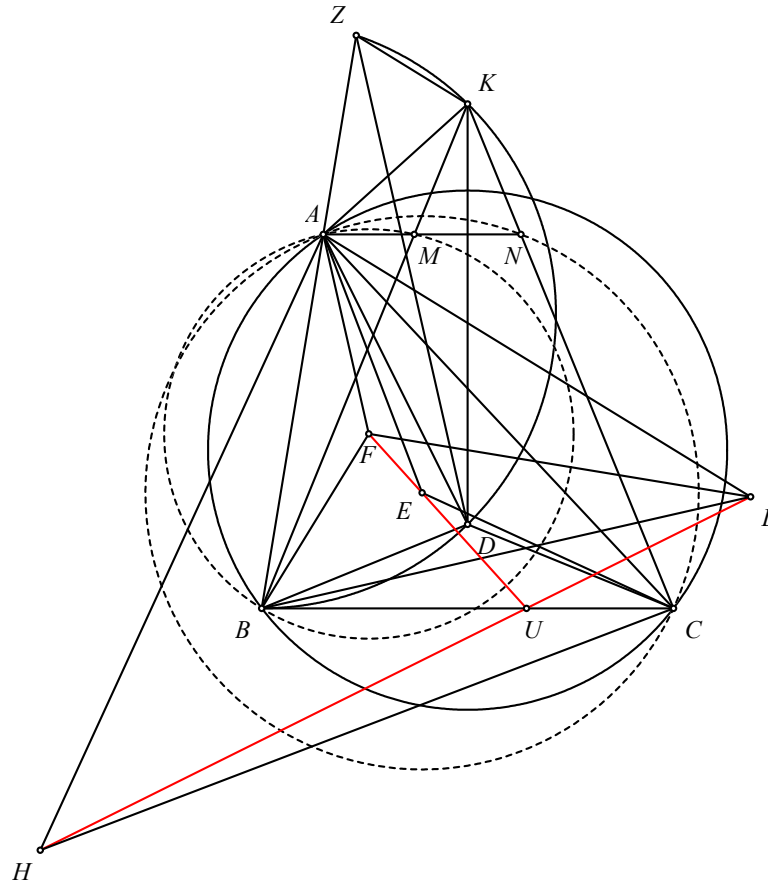
Suy ra

$$4 = (A + B)^2 \geq 4AB \geq 4,$$

chứng tỏ $A = B = 1$ và $(*)$ là đẳng thức. Dấu = trong $(*)$ chứng tỏ $x_i x_j = 0$ nếu i, j khác tính chẵn lẻ và $|i - j| \geq 3$.

Gọi k là chỉ số nhỏ nhất sao cho $x_k \neq 0$. Khi đó $x_{k+1+2j} = 0$ với mọi $j \leq -1$ và $j \geq 1$. Từ đó suy ra $x_i = 0$ với mọi $i \neq k+1$ và cùng tính chẵn lẻ với $k+1$. Mà $A = B = 1$ nên $x_{k+1} = 1, x_{k+2i} = x_{k+1+(2i-1)} = 0$ với mọi $i \geq 2$, $x_k = x, x_{k+2} = 1 - x$, với $0 < x \leq 1$. Từ đó ta có kết luận cần tìm.

2. a) Gọi M, N tương ứng là giao điểm của KB với $(F; FA)$, KC với $(E; EA)$.



Ta có $\angle AMB = \frac{1}{2}\angle AFB = \frac{1}{2}\angle BDC = \angle KBC$ nên $AM \parallel BC$.

Tương tự, $AN \parallel BC$. Từ đó suy ra A, M, N thẳng hàng.

Lại có, $KB = KC$ nên $KM = KN$. Suy ra $\mathcal{P}_{K/(F;FA)} = \overline{KM} \cdot \overline{KB} = \overline{KN} \cdot \overline{KC} = \mathcal{P}_{K/(E;EA)}$. Điều đó chứng tỏ A, K nằm trên trục đẳng phương của $(E;EA)$ và $(F;FA)$ và vì thế $AK \perp EF$.

b) Ta có $\angle LAB = \angle LBA = \angle HAC = \angle HCA = \angle KBC = \angle KCB$ và D là trực tâm của tam giác BKC nên chứng minh tương tự câu a) cho tam giác ABC với bộ ba điểm K, H, L (thay vì D, E, F) ta có $AD \perp HL$.

Gọi Z là giao điểm khác B của AB với (BKD) . Ta có $\angle KZB = 180^\circ - \angle BDK = 90^\circ - \angle DBC = 90^\circ - \angle FBA$. Suy ra $BF \perp KZ$.

Lại có, $\angle BZD = \angle BKD = \angle DBC = \angle BAF$. Suy ra $AF \parallel ZD$. Do đó $ZD \perp BL$.

Suy ra các đường thẳng tương ứng qua A, D, K và vuông góc với FL, BL, BF đồng quy tại Z . Từ đó, bằng cách áp dụng định lý Carnot cho tam giác ADK và BFL ta có các đường thẳng qua B, F, L , tương ứng vuông góc với DK, AK, AD đồng quy; nghĩa là BC, FE, HL đồng quy.

3. a) Ta sẽ chỉ ra rằng 2 xâu nhị phân là tương đồng nếu và chỉ nếu chúng có đúng 2 vị trí 1 trùng nhau và đúng 2 vị trí 0 trùng nhau. Thật vậy, giả sử 2 xâu tương đồng có ≤ 1 vị trí 0 trùng nhau (và do đó có ≥ 3 vị trí 1 trùng nhau); trường hợp có ≥ 3 vị trí 0 trùng nhau được chứng minh tương tự (hoặc đổi vai trò của 0 và 1). Tại ≥ 21 vị trí còn lại, chữ số 0 không đồng thời xuất hiện trong 2 xâu. Tại các vị trí đó, có ít nhất 3 vị trí mà ở đó cả hai xâu đều có số 1, nói cách khác không có số 0 nào. Điều này cho thấy tổng chữ số 0 của hai xâu không vượt quá $2 + (21 - 3) = 20 < 22$, mâu thuẫn.

b) Có $C_5^3 = 10$ cách điền 3 chữ số 1 vào 5 vị trí đầu tiên. Với mỗi cách điền như vậy, ta xây dựng một nhóm các xâu nhị phân trong S sao cho 3 chữ số 1 đầu tiên trùng với cách điền đó. Như vậy, hai xâu bất kỳ trong một nhóm trùng nhau ở ít nhất 3 chữ số 1, do đó chúng không tương đồng nhau.

Tương tự, có $C_5^3 = 10$ cách điền 3 chữ số 0 vào 5 vị trí đầu tiên. Với mỗi cách điền như vậy, ta xây dựng một nhóm các xâu nhị phân trong S sao cho 3 chữ số 0 đầu tiên trùng với cách điền đó. Như vậy, hai xâu bất kỳ trong một nhóm như vậy trùng nhau ở ít nhất 3 chữ số 0, do đó chúng cũng không tương đồng nhau.

Cuối cùng, trong 5 vị trí đầu tiên của mỗi xâu nhị phân phải có ít nhất 3 vị trí là chữ số 1 hoặc 3 vị trí là chữ số 0. Do đó mỗi xâu nhị phân nằm trong ít nhất một nhóm xây dựng theo cách trên đây. (Một xâu có thể nằm trong nhiều nhóm khác nhau, ta sẽ bỏ xâu đó vào đúng một trong các nhóm nếu muốn có một phân hoạch của S .)

Bài toán được giải quyết.

4. Ký hiệu $P(x, y)$ là bất đẳng thức của đề bài. Ta có

$$P(1, 1): (f(1))^2 \leq f(1) + 2 \implies f(1) \leq 2. \quad (1)$$

$$P(-1, -1): (f(-1))^2 \leq f(1) - 2 \xrightarrow{(1)} (f(-1))^2 \leq 0 \implies f(-1) = 0. \quad (2)$$

$$P(-x, -1): f(-x)f(-1) \leq f(x) - x - 1 \xrightarrow{(2)} f(x) \geq x + 1. \quad (3)$$

$$P(0, 0): (f(0))^2 \leq f(0) \implies \leq 1 \xrightarrow{(3)} f(0) = 1.$$

Từ đó suy ra

$$f(x) = f(x)f(0) \leq f(0) + x + 0 = 1 + x.$$

Điều này, kết hợp với (3) dẫn đến $f(x) = x + 1$ với mọi x .

Đảo lại, dễ dàng kiểm tra được $f(x) = x + 1$ là một nghiệm hàm của bài toán.

5. Xét một số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Với mọi $1 \leq i \leq k$, đặt $d_1 + \dots + d_i = a_i^2$ (a_i nguyên dương). Dễ thấy a_i là một dãy tăng. Ta gọi một số nguyên dương j là *tốt* nếu $a_i = i$ và $d_i = 2i - 1$ với mọi $1 \leq i \leq j$. Ta sẽ chỉ ra bằng quy nạp theo j rằng mọi số nguyên dương $j \leq k$ là tốt.

Trước hết, nhận xét rằng với mọi số nguyên $j \geq 2$ ta có

$$d_j = a_j^2 - a_{j-1}^2 = (a_j - a_{j-1})(a_j + a_{j-1}) \geq 3.$$

Nói riêng, ta có $d_1 = a_1 = 1$. Như vậy, 1 là số tốt.

Giả sử $j \leq k - 1$ là số tốt. Ta sẽ chỉ ra $j + 1$ cũng tốt. Thật vậy, ta có

$$a_j + a_{j+1} \mid a_{j+1}^2 - a_j^2 = d_{j+1} \implies a_j + a_{j+1} \mid n.$$

Do đó $a_j + a_{j+1}$ cũng là một ước của n . Do vậy, tồn tại một số nguyên s để $d_s = a_j + a_{j+1}$. Ta có, do $a_j < a_{j+1}$ nên

$$d_s \geq 2a_j + 1 \geq 2j + 1$$

Thế mà, do j là tốt $d_i = 2i - 1$ với mọi $i \leq j$ nên bất đẳng thức $d_s \geq 2j + 1$ kéo theo $s \geq j + 1$. Khi đó

$$a_j + a_{j+1} = d_s = (a_s - a_{s-1})(a_s + a_{s-1}) \geq a_s + a_{s-1} \geq a_{j+1} + a_j.$$

Suy ra các bất đẳng thức trên đây là đẳng thức, dẫn đến $a_s + a_{s-1} = a_{j+1} + a_j$ và vì thế $s = j + 1$; đồng thời ta cũng phải có $a_s - a_{s-1} = 1$, dẫn đến $a_{j+1} = a_j + 1 = j + 1$. Từ đó suy ra

$$d_{j+1} = (a_{j+1} - a_j)(a_{j+1} + a_j) = 2j + 1.$$

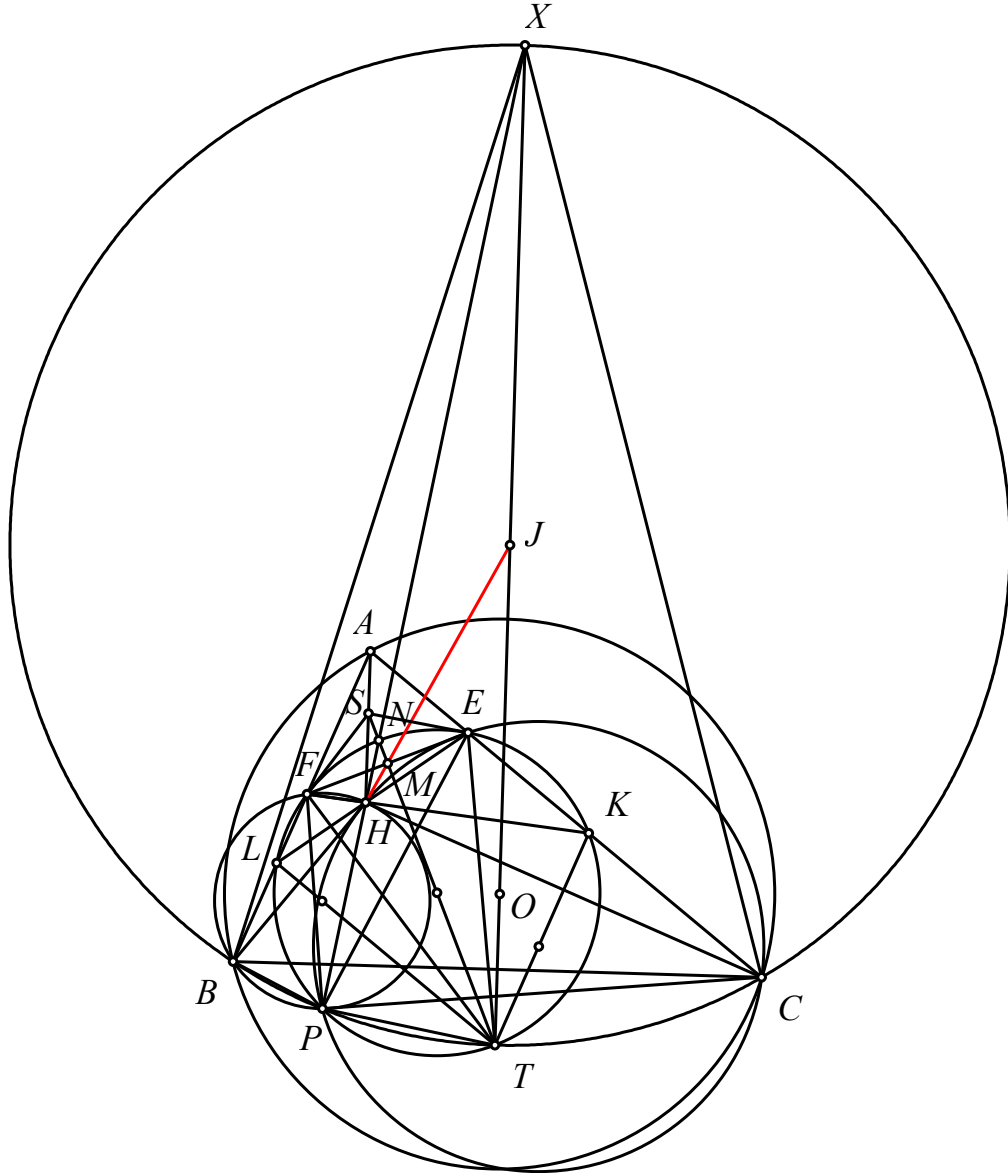
Điều đó chứng tỏ $j + 1$ là số tốt. Như vậy, theo nguyên lý quy nạp thì mọi số nguyên dương $j \leq k$ là tốt.

Tóm lại, nếu n có tính chất đã nêu thì các ước của n có dạng $1, 2, \dots, 2k - 1$. Nói riêng, nếu $k \geq 2$ thì d_{k-1} là một ước lẻ của $n - d_{k-1} = 2$. Suy ra $d_{k-1} = 1$, chứng tỏ $k = 2$. Như vậy, hoặc $k = 1$, dẫn đến $n = 1$, hoặc $k = 2$, dẫn đến $n = 3$. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng các giá trị này thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

6. a) Giả sử EH cắt AB tại L , FH cắt AC tại K .

Ta có $\angle LHB = \angle ECH = \angle LBH$, suy ra $LH = LB$. Mặt khác, theo tính chất quen biết, ta có $TB = TH$ (và cùng bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Suy ra LT là đường trung trực của BH , nói riêng vuông góc với BH . Ta thu được $TL \parallel AC$.

Tương tự $TK \parallel AB$.



Suy ra $\angle ELT = \angle HEA = 180^\circ - \angle HEC = 180^\circ - \angle BHC = \angle BAC = \angle TKC$. Suy ra E nằm trên (TLK) .

Tương tự, $\angle FKT = \angle AFK = 180^\circ - \angle BFK = 180^\circ - \angle BHC = \angle BAC = \angle TLB$. Suy ra F nằm trên (TLK) .

Các tính toán trên cho thấy $\angle EFT = \angle ELT = \angle BAC = \angle FKT = \angle FET$. Suy ra $TE = TF$.

b) Gọi P là giao điểm khác H của (HEC) và (HFB) . Ta có $(PB, PC) \equiv (PB, PH) + (PH, PC) \equiv 2(HB, HC) \equiv 2(AC, AB) \equiv (TB, TC) \pmod{\pi}$. Suy ra B, P, T, C đồng viên.

Lại có $\angle FPE = \angle FPH + \angle HPE = \angle ABH + \angle ACH = \angle ABH + \angle LHB = \angle FLE$. Suy ra P nằm trên (ETF) .

Mà $TE = TF$, PH là phân giác của $\angle EPF$ nên $\angle HPT = 90^\circ$. Suy ra PH đi qua điểm đối xứng X của T qua J (tâm đường tròn (BTC)).

Gọi N là điểm chính giữa cung EF không chứa T của (ETF) và M là trung điểm của EF và S là giao điểm của các tiếp tuyến tại E và F của (ETF) . Ta có FK giao EL tại H , FL giao EK tại A nên áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm F, E, E, K, L, A ta thu được A, S, H thẳng hàng.

Mà $(SM, NT) = -1$ nên $H(AM, XT) = H(SM, NT) = -1$. Do $AH \parallel XT$ nên HM đi qua trung điểm của XT , hay HJ chia đôi đoạn thẳng EF .