

KỶ THI TUYỂN SINH VÀO 10 THPT
MÔN TOÁN CHUYÊN
Năm học 2020 – 2021
THPT CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2x^3 = 3y^3 = 4z^3 \\ \sqrt[3]{2x^2 + 3y^2 + 4z^2} = 2 + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{6} \\ xyz > 0 \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Câu 2. (2,0 điểm)

Xét phương trình bậc 2: $ax^2 + bx + c = 0(1)$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Biết rằng các điều kiện sau thỏa mãn:

- Phương trình (1) có nghiệm
- Số $\overline{a2020b}$ chia hết cho 12
- Số $c^3 + 3$ chia hết cho $c + 3$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $a + b + c$

Câu 3. (2,0 điểm)

Tìm số nguyên a bé nhất sao cho: $x^4 + 2x^2 - 4x + a \geq 0$ với mọi số thực x

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $AB > BC$. Một đường tròn đi qua hai đỉnh A, C của tam giác ABC lần lượt cắt các cạnh AB, BC tại hai điểm K, N (K, N khác các đỉnh của tam giác ABC). Giả sử đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt nhau tại giao điểm thứ hai là M (M khác B). Chứng minh rằng:

- a) Ba đường thẳng BM, KN, AC đồng quy tại điểm P
- b) Tứ giác $MNCP$ nội tiếp
- c) $BM^2 - PM^2 = BK \cdot BA - PC \cdot PA$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho hai số A, B cùng có 2020 chữ số. Biết rằng số A có đúng 1945 chữ số khác 0, bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 15 chữ số ngoài cùng về bên phải; Số B có đúng 1954 chữ số khác 0, bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 24 chữ số ngoài cùng về bên phải. Chứng minh rằng $UCLN(A, B)$ là một số có không quá 1954 chữ số

DÁP ÁN

Câu 1.

$$\text{Đặt } 2x^3 = 3y^3 = 4z^3 = t$$

$$\text{Ta có: } t^3 = 24(xyz)^3 \Rightarrow t > 0 \Rightarrow x, y, z > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2x^3 + 3y^3 + 4z^3} = \sqrt[3]{t \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)}$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt[3]{2}.x = \sqrt[3]{3}.y = \sqrt[3]{4}.z = \sqrt[3]{t}$$

$$\Rightarrow 2 + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4} \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} \right) = \sqrt[3]{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \sqrt[3]{t}$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{t \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$
$$\left(\text{Dot} > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0 \right)$$

Câu 2.

$$\text{Vì } \overline{a2020b}:12 \text{ nên } \begin{cases} a+b+4 \vdots 3 \\ b \vdots 4 \end{cases} \Rightarrow b \in \{4; 8\} \Rightarrow b \leq 8$$

$$\text{Lại có, } b^2 - 4ac \geq 0 \text{ nên } ac \leq 16 \Rightarrow c \leq 16 \text{ (vì } a \text{ là số nguyên dương)}$$

$$\text{Mà } c^3 + 3 \vdots c + 3; c^3 + 3 = c^3 + 27 - 24 = (c+3)(c^2 - 3c + 9) \Rightarrow 24 \vdots c + 3$$

$$\text{Vì } c \text{ là số nguyên dương và } c \leq 16 \Rightarrow c + 3 \in \{4; 6; 8; 12\} \Rightarrow c \in \{1; 3; 5; 9\}$$

Xét các trường hợp:

$$1) b = 8 \text{ thì } \begin{cases} ac \leq 16 \\ a \vdots 3; c \in \{1; 3; 5; 9\} \end{cases} \Rightarrow a + c \text{ lớn nhất khi } (a, c) = (9, 1) \Rightarrow a + b + c = 18$$

$$2) b = 4 \Rightarrow \begin{cases} ac \leq 4 \\ a \equiv 1 \pmod{3}; c \in \{1; 3; 5; 9\} \end{cases}$$

Trong trường hợp này, chỉ có cặp (a, c) là $(1, 1); (1, 3); (4, 1)$ thỏa mãn, khi đó $a + c$ lớn nhất khi $(a, c) = (4, 1) \Rightarrow a + b + c = 9$

Vậy giá trị lớn nhất của $a + b + c = 18$

Câu 3.

Do $x^4 + 2x^2 - 4x + a \geq 0$ đúng với mọi số thực x . Xét $x = \frac{1}{2}$ ta có:

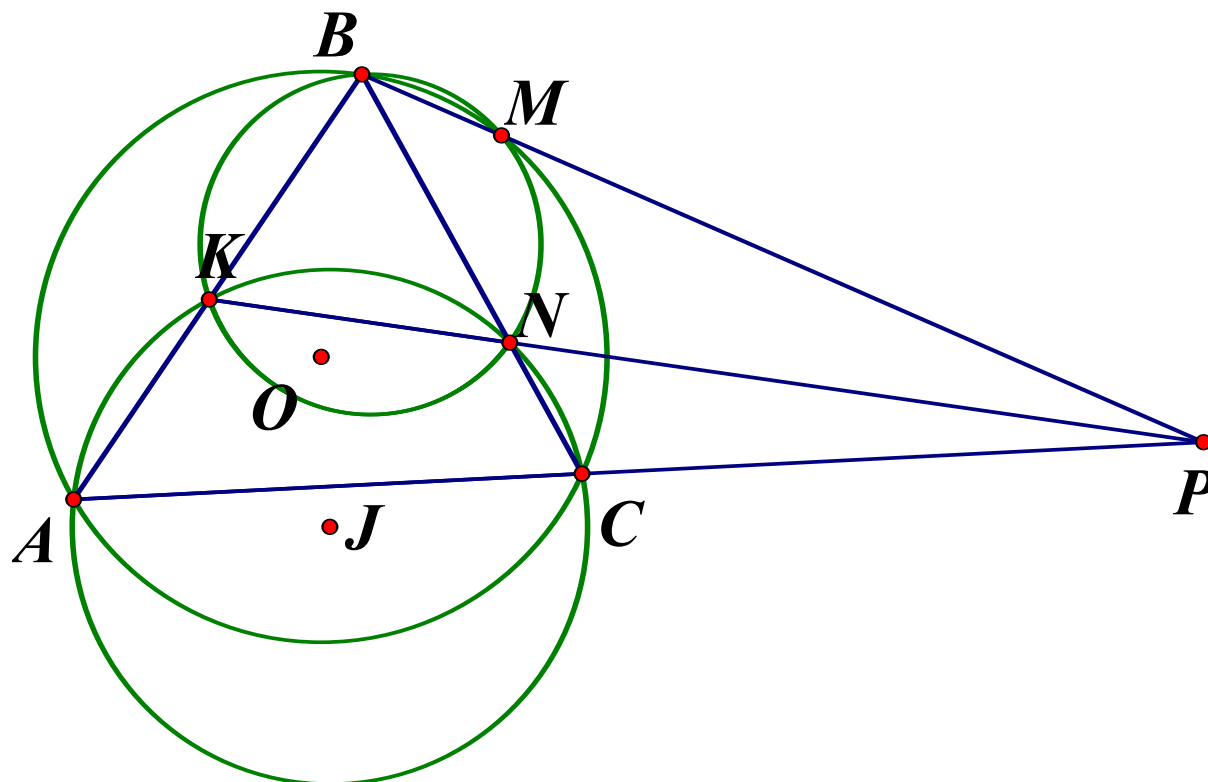
$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + a \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{23}{16} \Rightarrow a \geq 2 \text{ (do } a \text{ nguyên)}$$

Ta chứng minh $a = 2$ thỏa mãn điều kiện bài toán .

Thật vậy, ta có: $x^4 + 2x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2$ (luôn đúng)

Vậy $a_{\min} = 2$

Câu 4.



a) Gọi P là giao điểm của KN với AC, BP cắt (O) tại M'
Do tứ giác $ABM'C$ nội tiếp

$$\Rightarrow \triangle PCM' \sim \triangle PBA (g.g) \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PM'}{PA} \Rightarrow PB \cdot PM' = PA \cdot PC$$

Chứng minh tương tự, tứ giác $AKNC$ nội tiếp $\Rightarrow PA \cdot PC = PK \cdot PN$

$$\Rightarrow PK \cdot PN = PB \cdot PM' \Rightarrow \frac{PK}{PB} = \frac{PM'}{PN} \Rightarrow \triangle PKB \sim \triangle PM'N (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \angle PM'N = \angle PKB \Rightarrow KBM'N \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

$$\Rightarrow M' \equiv M \Rightarrow BM, KN, AC \text{ đồng quy tại } P \text{ (dpcm)}$$

$$\text{b) Do } AKNC \text{ nội tiếp} \Rightarrow \angle CNP = \angle BAC$$

$$\text{Do } ABMC \text{ nội tiếp} \Rightarrow \angle CMP = \angle BAC$$

Từ đây suy ra $\angle CNP = \angle CMP \Rightarrow CNMP$ là tứ giác nội tiếp

c) Từ $CNMP$ là tứ giác nội tiếp, ta có: $BM.BP = BN.BC (\triangle BNM \sim \triangle BPC)$

Mặt khác, $BN.BC = BK.BA (\text{do } \triangle BKN \sim \triangle BCA) \Rightarrow BM.BP = BK.BA$

Từ câu a ta có: $PM.PB = PC.PA$

$$\Rightarrow BK.BA - PC.PA = BM.BP - PM.BP$$

$$= BP(BM - PM) = (BM + PM)(BM - PM) = BM^2 - PM^2 \text{ (đpcm)}$$

Câu 5.

Viết $A = x00...00y$ và $B = z00...0t$, với x, z có 1930 chữ số và y có 15 chữ số, t có 24 chữ số

Ta có $A = 10^{90}.x + y$ và $B = 10^{90}.z + t$

Đặt $d = UCLN(A, B)$ ta có: $x.B - z.A$ chia hết cho $d \Rightarrow xt - yz$ chia hết cho d

Dễ thấy $xt > yz$ nên $xt - yz > 0 \Rightarrow d \leq xt - yz < xt$

Lại có $x < 10^{1930}, t < 10^{24} \Rightarrow d < 10^{1930}.10^{24} = 10^{1954} \Rightarrow d$ có không quá 1954 chữ số.