

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
THPT**

NĂM HỌC 2024 – 2025

**Môn thi chuyên: TOÁN (CHUYÊN
TOÁN - TIN)**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 05/6/2024

**Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian phát đề)**

Bài 1:

1. Cho biểu thức $T = \left(\frac{2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4\sqrt{x}+4} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức T

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho $T < 0$

2. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x - 3m + 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (P), (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1^2 - y_2^2 = 2024(x_1^2 - x_2^2)$

Bài 2:

1. Giải phương trình: $2x^2 + (x+2)\sqrt{x+2} = 2 - 3x (x \in R)$

2. Giải hệ phương trình với $x, y \in R$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ y\sqrt{x} + x\sqrt{y} = x^2 + y \end{cases}$$

Bài 3: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn phương trình sau

$$2x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y = 7$$

Bài 4: Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC.

1. Chứng minh $APQ = AHQ$ và bốn điểm B, C, Q, P cùng nằm trên một đường tròn.

2. Đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh hai tam giác MQH và MHP đồng dạng và $MH^2 = MB.MC$

3. Đường thẳng MA cắt (O) tại K khác A, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCQP. Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Bài 5: Cho năm số thực dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thỏa mãn $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2024$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2)}{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1:

1. a) Với điều kiện xác định $x > 0, x \neq 4$, ta có

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4\sqrt{x}+4} \right) \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} T < 0 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định, ta được $0 < x < 4$

Vì x nhận các giá trị nguyên nên $x \in \{1, 2, 3\}$

Kết luận: Với các giá trị nguyên $x \in \{1, 2, 3\}$ thì $T < 0$

2. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = 2x - 3m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3m - 1 = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có $\Delta' = 2 - 3m$

Đề (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm thực x_1, x_2 phân biệt, tức là

$$\Delta' = 2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}$$

Với $m < \frac{2}{3}$ theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 3m - 1 \end{cases}$

Vì $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in (P)$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$

Khi đó biểu thức đang xét trở thành

$$\begin{aligned} x_1^4 - x_2^4 &= 2024(x_1^2 - x_2^2) \\ &\Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = 2024(x_1^2 - x_2^2) \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2024) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2024 = 0 \quad (\text{vì } x_1 + x_2 = 2 \neq 0; x_1 \neq x_2) \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2024 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^2 - 2(3m - 1) - 2024 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6m = -2018 \Leftrightarrow m = \frac{-1009}{3} (tm)$$

Kết luận: $m = \frac{-1009}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2:

1. Điều kiện xác định $x \geq -2$

Phương trình ban đầu tương đương

$$\begin{aligned} (2x^2 + 3x - 2) + (x + 2)\sqrt{x + 2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(2x - 1) + (x + 2)\sqrt{x + 2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(2x - 1 + \sqrt{x + 2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(tm) \\ \sqrt{x + 2} = 1 - 2x(*) \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = (1 - 2x)^2 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5x - 1 = 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{41}}{8}$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -2; \frac{5 - \sqrt{41}}{8} \right\}$

2. Điều kiện xác định: $x > 0, y > 0$

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$\begin{aligned} x - y + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - y + \frac{x - y}{xy} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Vì $x, y > 0$ nên $1 + \frac{1}{xy} > 0$

Do đó $x = y$

Thay $x = y$ vào phương trình thứ hai ta được

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} + x\sqrt{x} &= x^2 + x \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{x} + x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(\sqrt{x} - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1; 1)$

Bài 3:

Ta có: $2x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y = 7$
 $\Leftrightarrow (x+y)(2x-y) + 2(x+y) = 7$
 $\Leftrightarrow (x+y)(2x-y+2) = 7$

Ta có các cách phân tích $7 = 7.1 = 1.7 = (-7).(-1) = (-1).(-7)$

Do đó xét các trường hợp sau

*) $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} (tm)$

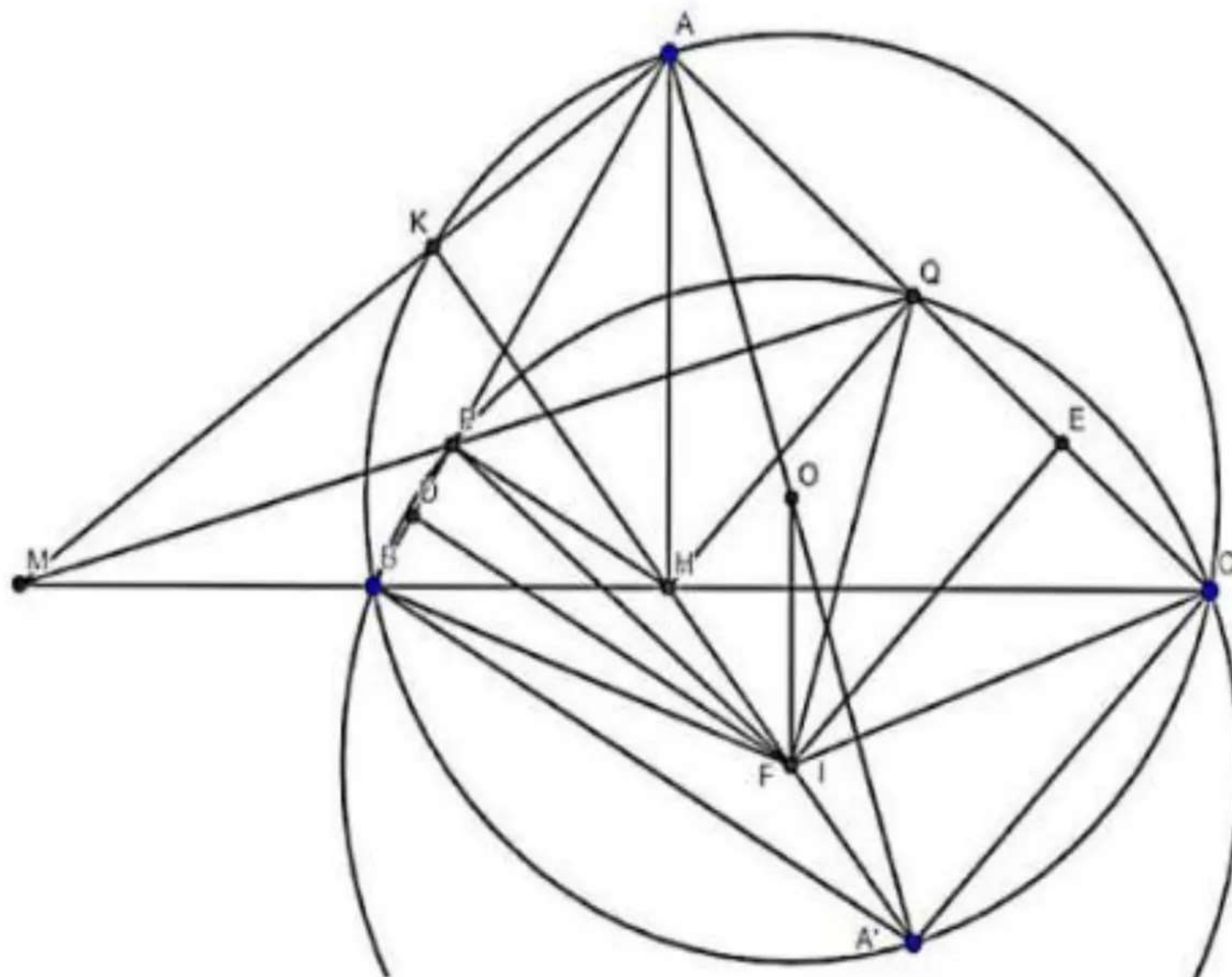
*) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y+2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} (tm)$

*) $\begin{cases} x+y=-7 \\ 2x-y+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-10}{3} \\ y=\frac{-11}{3} \end{cases} (l)$

*) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-y+2=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-10}{3} \\ y=\frac{7}{3} \end{cases} (l)$

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x; y) \in \{(2; 5); (2; -1)\}$

Bài 4:



1. Xét tứ giác APHQ có $\angle APH + \angle AQH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Nên APHQ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\angle APQ = \angle AHQ$

Mặt khác $\angle AHQ = 90^\circ - \angle QHC = \angle QCB$ nên $\angle APQ = \angle QCB$

Do đó BCQP là tứ giác nội tiếp

Hay 4 điểm B, C, Q, P cùng thuộc một đường tròn

2. Vì APHQ là tứ giác nội tiếp nên $\angle HQP = \angle HAP = 90^\circ - \angle PHA = \angle PHM$

Xét tam giác MQH và tam giác MHP có

$$\angle PHM = \angle HQP \text{ (cmt)}$$

$\angle QMH$ chung

$$\Rightarrow \triangle MQH \sim \triangle MHP (g - g)$$

$$\Rightarrow \frac{MQ}{MH} = \frac{MH}{MP} \Rightarrow MH^2 = MQ \cdot MP$$

Theo câu 1, BCQP là tứ giác nội tiếp nên $MB \cdot MC = MQ \cdot MP$

$$\text{Vậy } MB \cdot MC = MH^2$$

3. Ta có AKBC là tứ giác nội tiếp

$$\text{Do đó: } MA \cdot MK = MB \cdot MC = MH^2$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MH} = \frac{MH}{MK}$$

Xét tam giác MKH và tam giác MHA có

$$\frac{MA}{MH} = \frac{MH}{MK} \text{ (cmt)}$$

$\angle AMH$ chung

$$\Rightarrow \triangle MKH \sim \triangle MHA (c - g - c)$$

$$\Rightarrow \angle MKH = \angle MHA = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AK \perp HK$$

Kẻ đường kính AA' của (O) thì $AK \perp AA'$

Từ đó K, H, A' thẳng hàng

Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của PB, QC, HA'

Ta có: $HP \parallel A'B$ (cùng vuông góc với AB)

Do đó: HPBA' là hình thang

Từ đó FD là đường trung bình của hình thang này

Suy ra $FD \parallel HP$

Mặt khác $HP \perp AB$ nên $FD \perp BE$

Do đó FD là đường trung trực của đoạn thẳng BE

Hoàn toàn tương tự, FE là đường trung trực của đoạn thẳng QC

Do đó F là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác BPQC, tức là $F \equiv I$

Suy ra H, I, A' thẳng hàng

Từ (1), (2) ta suy ra H, I, K thẳng hàng

Bài 5:

Đối với 2 số thực dương x, y ta có bất đẳng thức sau:

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức trên một cách liên tục để đánh giá phần mẫu số của biểu thức P, ta được

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 &\leq \frac{(a_1 + a_2)^2}{4} a_3 a_4 a_5 = \frac{a_1 + a_2}{4} (a_1 + a_2) a_3 a_4 a_5 \\ &\leq \frac{(a_1 + a_2)}{4} \cdot \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{4} \cdot a_4 a_5 = \frac{(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)}{16} (a_1 + a_2 + a_3) \cdot a_4 a_5 \\ &\leq \frac{(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)}{16} \cdot \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2}{4} \cdot a_5 \\ &\leq \frac{(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}{64} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \cdot a_5 \\ &\leq \frac{(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}{64} \cdot \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{4} \\ &\leq \frac{(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \cdot 2024^2}{256} \end{aligned}$$

Do đó: $P \geq \frac{256}{2024^2} = \frac{4}{64009}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2024 \\ a_1 = a_2 \\ a_1 + a_2 = a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 = a_4 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \frac{253}{2} \\ a_3 = 253 \\ a_4 = 506 \\ a_5 = 1012 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{64009}$, đạt được tại $a_1 = a_2 = \frac{253}{2}$, $a_3 = 253$, $a_4 = 506$, $a_5 = 1012$