

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
ĐỀ CHÍNH THỨC
ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC: 2024 – 2025
Môn thi: TOÁN (Chuyên Toán)
Ngày thi: 10/06/2024
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I

1) Giải phương trình $x(x+1) + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$

2) Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn

$$a^2 - 2a(b+c) = b^2 - 2b(c+a) = c^2 - 2c(a+b)$$

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$

Câu II

1) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + 4y^2 = 2xy(x-2y) + 5$

2) Cho m, n là các số nguyên thỏa mãn $m^2 - mn + 4n^2$ chia hết cho 25. Chứng minh số $m^2 + mn + 4n^2$ chia hết cho 25.

Câu III

1) Cho x, y, k là các số nguyên dương sao cho số $p = \frac{x^k y}{x^2 + y^2}$ là số nguyên tố. Tìm k

2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a \leq 2, b \leq 2, c \leq 2; a+b+c=3$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{ab(b+c+1)} + \sqrt{bc(c+a+1)} + \sqrt{ca(a+b+1)}$$

Câu IV

Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O), điểm M nằm giữa hai điểm B và C. Hai đường thẳng AM và DC cắt nhau tại P. Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại K.

1) Chứng minh tam giác BCK đồng dạng với tam giác CPB

2) Hai đường thẳng BP và CK cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng MH tại R. Chứng minh tam giác BRK là tam giác vuông cân.

3) Các đường thẳng vuông góc với OH kẻ từ O và H, cắt đường thẳng AB lần lượt tại X và Y. Lấy điểm Q thuộc tia đối của tia BC sao cho BQ = CM. Chứng minh hai đường thẳng QR, DK cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MXY.

Câu V

Cho bảng ô vuông kích thước 6x6. Ở bước đầu tiên, bạn Đan tô đỏ k ô vuông bất kỳ của bảng. Sau đó, ở mỗi bước tiếp theo bạn Đan tô đỏ các ô vuông kề với ít nhất hai ô đã được tô đỏ (hai ô vuông được gọi là kề nhau nếu chúng có cạnh chung)

1) Chỉ ra một cách tô đỏ 23 ô của bảng ở bước đầu tiên sao cho dù sau bao nhiêu bước, bạn Đan cũng không thể tô đỏ được tất cả các ô của bảng.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của k để tồn tại một cách tô đỏ k ô vuông ban đầu sao cho sau một số hữu hạn bước, bạn Đan tô đỏ được tất cả các ô vuông của bảng.

ĐÁP ÁN

Câu I:

1) ĐKXĐ: $x \geq -2$

$$x(x+1) + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x+2} + x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = -x \text{ (đk: } x \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow x+2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (tm)} \\ x = 2 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$

2) Ta có: $a^2 - 2a(b+c) = c^2 - 2c(a+b)$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2ac + 2bc = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-2c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 2c \end{cases}$$

TH1: $a = b$

Ta có: $a^2 - 2a(b+c) = c^2 - 2c(a+b)$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a(a+c) = c^2 - 4ac$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = c$$

Vậy ta thay $a = b = c$ vào biểu thức M ta được

$$M = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = \frac{0}{c} + \frac{0}{a} + \frac{0}{b} = 0$$

TH2: $a + b = 2c$ (2)

Ta có: $a^2 - 2a(b+c) = c^2 - 2c(a+b)$

$$\Rightarrow a^2 - a(2b+2c) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a(2b+a+b) = -\frac{3(a+b)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a(a+3b) + 3(a+b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 6ab + 3b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $a = b = c$

Do đó $M = 0$

Vậy $M = 0$.

Câu II

2) Ta có: $m^2 - mn + 4n^2 = (m + 2n)^2 - 5mn : 25$

$$\Rightarrow (m + 2n)^2 - 5mn : 5$$

$$\Rightarrow (m + 2n)^2 : 5$$

$$\Rightarrow m + 2n : 5$$

$$\Rightarrow (m + 2n)^2 : 25$$

$$\Rightarrow 5mn : 25 \Rightarrow mn : 5 \Rightarrow \begin{cases} m : 5 \\ n : 5 \end{cases}$$

Nếu $m : 5$ thì từ $m^2 - mn + 4n^2 : 25 \Rightarrow m^2 - mn + 4n^2 : 5$

$$\Rightarrow 4n^2 : 5 \Rightarrow n^2 : 5 \Rightarrow n : 5$$

Nếu $n : 5$ thì từ $m^2 - mn + 4n^2 : 25 \Rightarrow m^2 - mn + 4n^2 : 5$

$$\Rightarrow 4m^2 : 5 \Rightarrow m^2 : 5 \Rightarrow m : 5$$

Vậy ta luôn có $\begin{cases} m : 5 \\ n : 5 \end{cases}$

Suy ra $m^2 + mn + 4n^2 : 25$

Câu III

1) Gọi $d = UCLN(x; y) \Rightarrow x = da, y = db, (a; b) = 1$

Khi đó p trở thành $p = \frac{d^{k-1} \cdot a^k \cdot b}{a^2 + b^2}, (k \geq 1)$

Gọi p_0 là một số nguyên tố chung của $a^k b$ và $a^2 + b^2$

$$\Rightarrow a^k b : p_0 \Rightarrow \begin{cases} a : p_0, a^2 + b^2 : p_0 \Rightarrow b : p_0 \\ b : p_0, a^2 + b^2 : p_0 \Rightarrow a : p_0 \end{cases} \Rightarrow \text{vô lý vì } (a; b) = 1$$

$$\Rightarrow UCLN(a^k b; a^2 + b^2) = 1 \Rightarrow d^{k-1} : (a^2 + b^2)$$

Đặt $d^{k-1} = t(a^2 + b^2) \Rightarrow p = t \cdot a^k \cdot b$ là số nguyên tố

Nếu $k = 1$ thì $d^{k-1} = 1 : (a^2 + b^2) \Rightarrow$ vô lý

Nếu $k > 1$ thì $p = t \cdot a^k \cdot b$ là số nguyên tố $\Rightarrow a = 1 \Rightarrow p = t \cdot b \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

TH1: Nếu $t = 1 \Rightarrow b = p; d^{k-1} = 1 + p^2$

$$\Rightarrow p^2 = (d - 1)(d^{k-2} + d^{k-3} + \dots + 1)$$

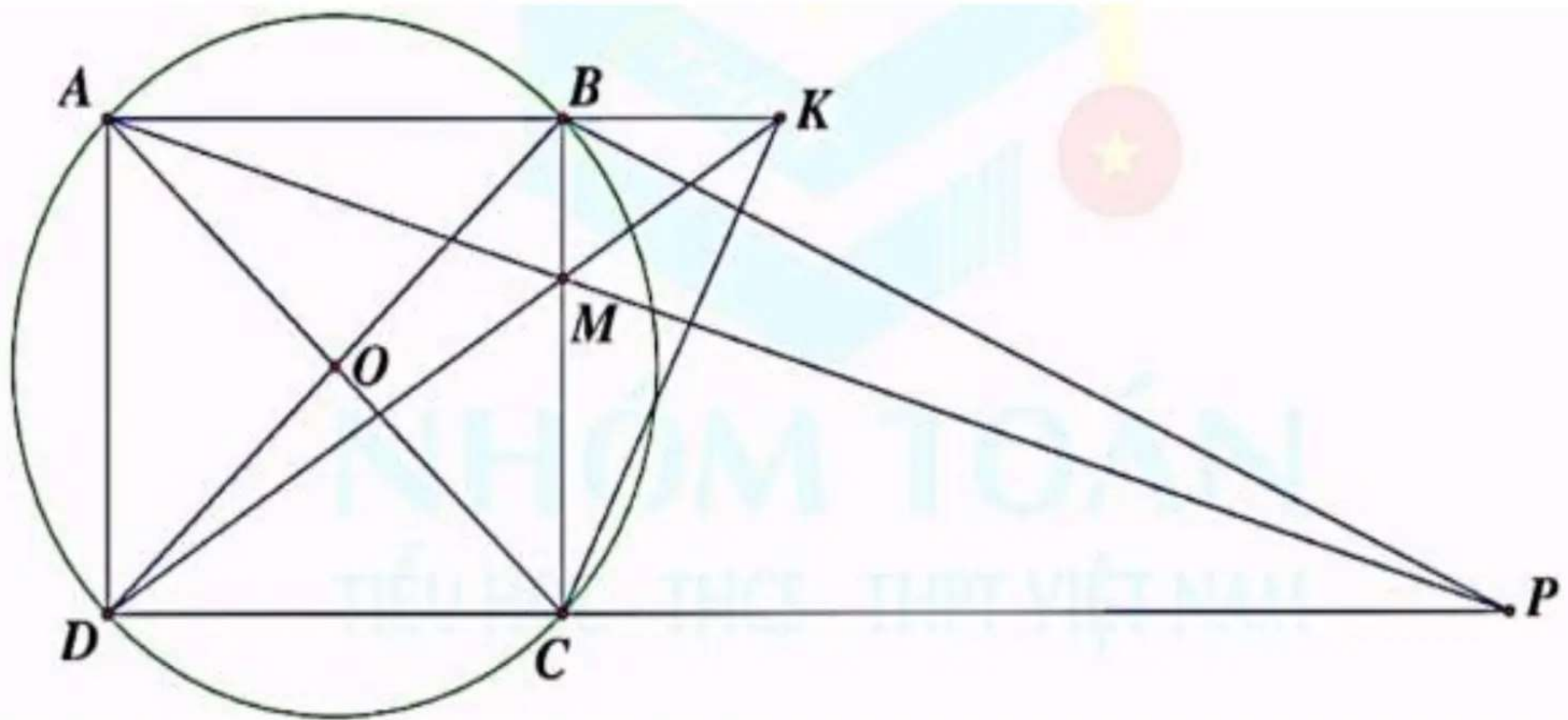
Do đó $(a - 2)(a^2 - 5a + 2) \geq 0 \Rightarrow P \geq 2$

Dấu “=” xảy ra khi chẳng hạn $a = 2, b = 1, c = 0$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $3\sqrt{3}$ khi $a = b = c = 1$

Và giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi $a = 2, b = 1, c = 0$ và các hoán vị

Câu IV



1. Ta có hình vuông ABCD $\Rightarrow$ AB // CD

$$AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CP \Rightarrow \frac{AB}{CP} = \frac{BM}{MC} \quad (1) \text{ (Định lý Thales)}$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow BK \parallel DC \Rightarrow \frac{BK}{CD} = \frac{BM}{MC} \quad (2) \text{ (Định lý Thales)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BK}{CD} = \frac{AB}{CP} \Rightarrow \frac{BK}{CB} = \frac{BC}{CP}$

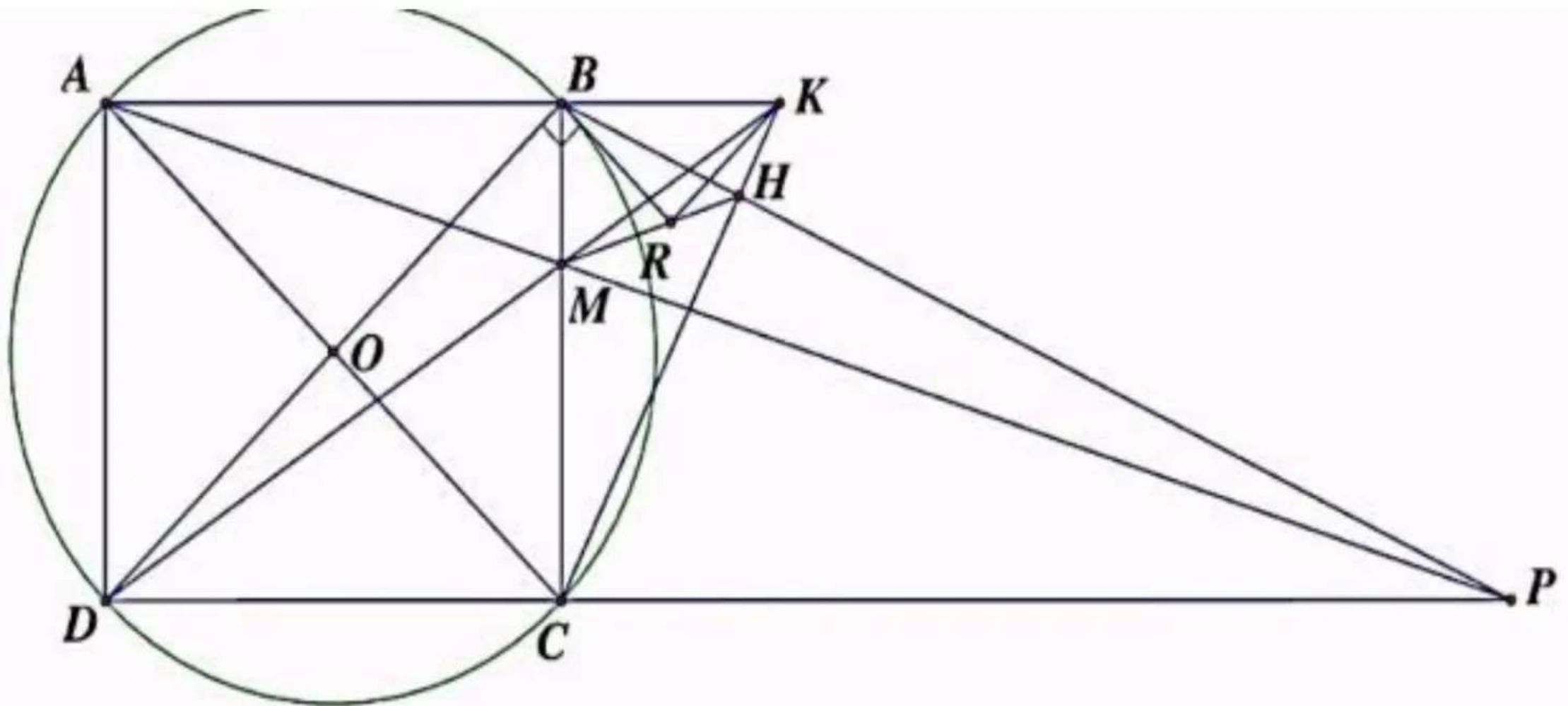
Xét tam giác BCK và tam giác CPB có

$$\frac{BK}{CB} = \frac{BC}{CP} \text{ (cmt)}$$

$$CBK = BCP = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta BCK \sim \Delta CPB(c-g-c)$$

2.



Cách 1:

Gọi cạnh hình vuông là $a > 0$

Ta có: $MAB = APD$ (so le trong)

$$MBA = ADP = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta APD$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{AD} = \frac{AB}{PD}$$

$$\Rightarrow MB \cdot PD = AB \cdot AD = a^2 = BO \cdot BD$$

$$\Rightarrow \triangle BOM \sim \triangle DPB$$

$$\Rightarrow \angle BOM = \angle DPB \quad (*)$$

$$\text{Mà } \triangle BCK \sim \triangle CPB \Rightarrow \angle BCK = \angle CPB$$

$$\text{Cũng có } \angle HBK = \angle CPB \text{ (so le trong)} \Rightarrow \angle HBK = \angle BCK$$

$$\text{Ta có: } \angle HBK + \angle BKH = \angle BCK + \angle BKH = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BHK = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \angle BOC = 90^\circ \Rightarrow B, O, C, H \text{ thuộc đường tròn đường kính BC}$$

$$\Rightarrow \angle BOH = \angle BCH \Rightarrow \angle BOH = \angle DPB (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \Rightarrow \angle BOH = \angle BOM$$

$$\Rightarrow O, H, M \text{ thẳng hàng}$$

$$\text{Mà tứ giác BOCH nội tiếp nên ta có } \angle OHC = \angle OBC = 45^\circ$$

$$\text{Lại có: } BR \parallel AC \text{ (vì cùng vuông góc với OB)}$$

$$\Rightarrow \angle RBK = \angle MHC$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác BRHC nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \angle BRK = \angle BHK = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \angle RBK = 45^\circ \text{ nên tam giác RBK vuông cân tại R}$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \triangle BCK \sim \triangle CPB \text{ (chứng minh phần a)}$$

$$\Rightarrow \angle BCK = \angle BPC \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \angle BCK + \angle HCP = \angle BCP = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HCP + \angle HPC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \text{Tam giác CHP vuông tại H}$$

$$\Rightarrow CK \perp BP \text{ tại H}$$

$$\text{Có } \frac{HB}{HC} = \frac{CB}{CP} = \frac{MB}{MC}$$

$$\Rightarrow HM \text{ là tia phân giác của } \angle BHC$$

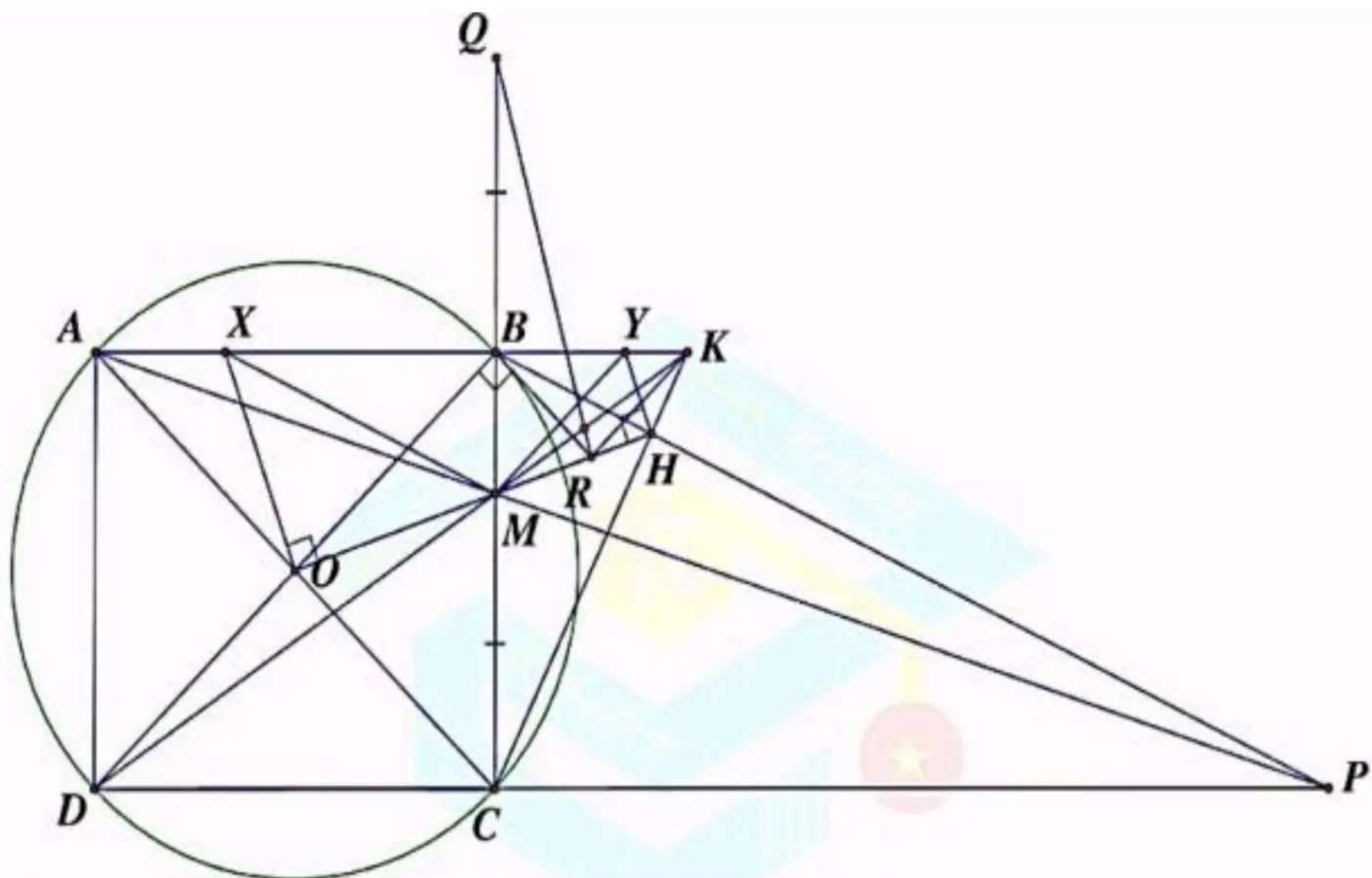
$$\Rightarrow \angle MHC = 45^\circ = \angle RBK$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác BRHK nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \angle RBK = \angle RHC = 45^\circ, \angle RKB = \angle RHB = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \text{Tam giác RBK vuông cân tại R}$$

3.



Tứ giác BMHY nội tiếp nên tam giác BMY vuông cân tại B (do $BHO = BHY = 45^\circ$)
 $\Rightarrow BM = BY$

$\Rightarrow$ Tứ giác QXMY nội tiếp

Ta chứng minh K' trùng K

$$\Rightarrow OB \parallel MY \Rightarrow MY \perp BR$$
$$\Rightarrow RYK = 180^\circ - BYR = 180^\circ - BMR = BMO = QTM = RTK'$$
$$\Rightarrow RK'B = QTY = QXB = 45^\circ$$

Từ đó tam giác BRK' vuông cân

Do đó K' trùng K

Vậy ta có đpcm

Câu V

1) Ta tô đỏ 23 ô vuông thuộc hình chữ nhật 4×6 trong hình vuông ban đầu

Dễ thấy bước tiếp theo chỉ có thể tô được một ô thuộc hình chữ nhật và không thể tô được ra ngoài hình chữ nhật

Suy ra không thể tô hết hình vuông 6×6

2) Ta chứng minh $k \geq 6$

Thật vậy giả sử với $k \leq 5$ tồn tại một cách tô thỏa mãn đề bài

Khi đó sẽ tồn tại 1 hàng i không có ô vuông nào được tô từ đầu (vì bảng có 6 hàng)

+ Nếu hàng hoặc cột này ở vị trí biên thì hàng hoặc cột đó sẽ không thể tô màu nên không thể phủ kín hình vuông.

+ Dễ thấy không có hai hàng liên tiếp nào không cùng có ô vuông nào được tô từ đầu

Nếu hàng này không phải vị trí biên thì hàng này chia bảng ô vuông thành hai phần trên và dưới.

Ta tiến hành tô màu riêng biệt hai phần này theo quy tắc.

Sau đó để tô được hết hàng ô vuông thì mỗi cặp ô vuông đối diện nhau qua hàng i phải có ít nhất một ô được tô màu đỏ và có ít nhất một cặp ô được tô màu đỏ.

Ta xét các trường hợp sau (*)

TH1: Một phần có 1 ô và một phần có 4 ô.

Dễ thấy phần chứa 1 ô là hàng ở biên không mất tính tổng quát giả sử hàng 1

Khi đó theo (*) thì phần chứa 4 ô phải tô được tất cả các ô của hình có kích thước 4×6 do có ít nhất một ô ở hàng thứ 6. Hai hàng 4 và 5 có ít nhất một ô nên hàng thứ 3 có nhiều nhất hai ô.

Nên ta không thể tô hết hàng thứ 3

Nên không thể tô hết bảng ô vuông sau hữu hạn bước.

TH2: Một phần có 2 ô và một phần có 3 ô

Lý luận như trên ta thấy không thể tô hết bảng ô vuông sau hữu hạn bước

Với $k = 6$ ta tô theo đường chéo bảng 6×6 thì thỏa mãn đề bài.