

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
QUẢNG TRỊ**

NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = a + b + c$.

Chứng minh $a = b = c$.

2. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases}$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$.

1. Chứng minh $a + b + c \geq 9$.

2. Chứng minh $a + b + c \geq 4 \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \right) + 5$.

Câu 3. (1,5 điểm)

1. Chứng minh $n^2 + 3n + 1$ là số lẻ với mọi số tự nhiên n .

2. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $4a^2 + b + 4$; $4b^2 + a + 4$ đều là số chính phương.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$. Kẻ các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ đến đường tròn tâm O , đường kính BC (P, Q là các tiếp điểm và P, F nằm cùng phía so với đường thẳng AD).

1. Chứng minh $AP^2 = AB \cdot AF$ và 5 điểm A, P, D, O, Q nằm trên một đường tròn.

2. Chứng minh H, P, Q thẳng hàng.

3. Chứng minh PF, QE, AD đồng quy.

Câu 5. (0,5 điểm)

Trên mặt phẳng có 5 điểm tùy ý, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh tồn tại 4 điểm là 4 đỉnh của một tứ giác lồi.

----- HẾT -----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG TRỊ

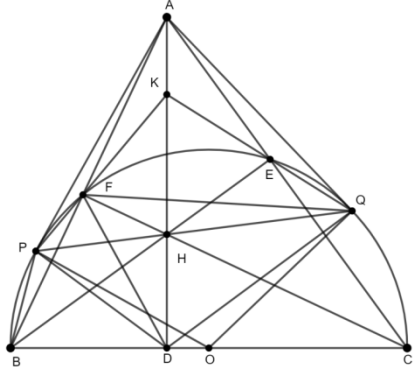
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

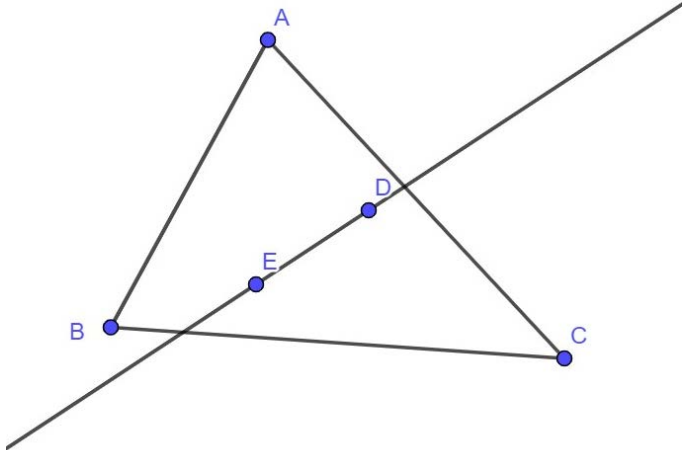
NĂM HỌC 2023 - 2024

MÔN THI: TOÁN

(Hướng dẫn chấm có 2 trang)

Câu	Ý	NỘI DUNG YÊU CẦU VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM	Điểm
1	1	Ta có $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = a + b + c \Leftrightarrow (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = abc(a + b + c)$	0,5
		$\Leftrightarrow 2(ab)^2 + 2(bc)^2 + 2(ca)^2 = 2ab.bc + 2bc.ca + 2ca.ab$	0,5
		$\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$	0,5
	2	Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Ta có $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2x-1}$ Bình phương hai vế, rút gọn, ta được $2\sqrt{2x-1} = x+1$	0,75
		$2\sqrt{2x-1} = x+1 \Leftrightarrow 4(2x-1) = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$	0,75
		Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; 5\}$	
1 4,0 điểm	3	Điều kiện: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x, y \geq -1 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ ($S^2 \geq 4P$) hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} S - \sqrt{P} = 3 \\ S + 2 + 2\sqrt{S + P + 1} = 9 \end{cases}$	0,25
		$\begin{cases} S - \sqrt{P} = 3 \\ S + 2 + 2\sqrt{S + P + 1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 3; \\ P = (S - 3)^2 \\ 2\sqrt{S + (S - 3)^2 + 1} = 7 - S \end{cases}$ $2\sqrt{S + (S - 3)^2 + 1} = 7 - S \Rightarrow 4(S^2 - 5S + 10) = 49 - 14S + S^2$ $\Leftrightarrow 3S^2 - 6S - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = -1 \\ S = 3 \end{cases}$	0,5
		Thử lại thấy $S = 3$ thỏa mãn. Khi đó ta được $\begin{cases} S = 3 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 0 \end{cases}$. Giải ra ta được tập nghiệm của hệ $S = \{(0; 3); (3; 0)\}$.	0,25
2 1,0 điểm	1	Ta có $ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.	0,25
		Cách 1: Khi đó $a + b + c = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9$	0,25

		Cách 2: $a + b + c = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$	
	2	Ta có $a + b + c = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} - 3$	0,25
		$\geq \frac{4(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} - 3 = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{abc} + 5 = 4 \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \right) + 5$	0,25
3 1,5 điểm	1	Ta có $n^2 + 3n + 1 = n(n+1) + 2n + 1$.	0,25
		Do $n(n+1)$ chẵn, $2n+1$ lẻ nên $n^2 + 3n + 1$ là số lẻ.	0,25
	2	Do vai trò a, b bình đẳng nên ta có thể giả sử $b \leq a$. Khi đó $(2a)^2 < 4a^2 + b + 4 \leq 4a^2 + a + 4 \leq 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$	0,25
		Suy ra $4a^2 + b + 4 = (2a+1)^2 \Rightarrow b = 4a - 3$.	0,25
		Khi đó $(8a-6)^2 < 4b^2 + a + 4 = 64a^2 - 95a + 40 < (8a-4)^2$	0,25
		Suy ra $64a^2 - 95a + 40 = (8a-5)^2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $a = 1; b = 1$.	0,25
4 3,0 điểm	1		
		Ta có $\angle APF = \angle ABP$ nên $\triangle APF$ đồng dạng $\triangle ABP$ suy ra $AP^2 = AF \cdot AB$.	0,5
	2	Ta có $\angle APO = \angle ADO = \angle AQO = 90^\circ$ nên 5 điểm A, P, D, O, Q nằm trên đường tròn đường kính AO .	0,5
		Ta có $\triangle AFH$ đồng dạng $\triangle ADB$ nên $AP^2 = AF \cdot AB = AH \cdot AD$. Suy ra $\triangle APH$ đồng dạng $\triangle ADP$. Do đó $\angle APH = \angle ADP$ (1).	0,5
		Tứ giác $APDO$ nội tiếp nên $\angle ADP = \angle AOP = \angle APQ$ (2)	0,5
		Từ (1), (2) suy ra $\angle APH = \angle APQ$ nên P, H, Q thẳng hàng.	
	3	Gọi K là giao điểm QE và AD . Ta có $\angle KQF = \angle EBF = \angle HDF = \angle KDF$ nên tứ giác $DFKQ$ nội tiếp.	0,25
		Ta có $\angle PFD = \angle PFB + \angle BFD = \angle PCB + \angle ACB$	0,25

		Và $\angle KQD = \angle EQP + \angle PQD = \angle ACP + \angle POD$ $= \angle ACP + 2\angle PCD = \angle ACB + \angle PCB$	0,25
		Suy ra $\angle PFD = \angle KQD$. Do đó $\angle PFD + \angle DFK = \angle KQD + \angle DFK = 180^\circ$. Suy ra PF đi qua K . Vậy PF, QE, AD đồng quy.	0,25
5 0,5 điểm		Với mọi cặp điểm M, N bất kì, nếu 3 điểm còn lại nằm về một phía so với đường thẳng MN thì kẻ đoạn thẳng MN. Các đoạn thẳng vừa kẻ tạo thành một đa giác lồi. Nếu đa giác lồi đó là ngũ giác hoặc tứ giác thì ta có điều phải chứng minh. Nếu đa giác lồi đó là tam giác, ta gọi các đỉnh là A, B, C. Kẻ đường thẳng đi qua 2 điểm D, E còn lại.  Khi đó, trong 3 đỉnh của tam giác ABC, tồn tại 2 điểm nằm về một phía so với đường thẳng DE, chẳng hạn là A, B. Ta được A, B, D, E là 4 đỉnh của một tứ giác lồi. Ta có điều phải chứng minh.	0,5

Tổng số điểm toàn bài là 10 điểm.

----- Hết -----