

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH PHÚC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 – 2021**

Môn thi: **TOÁN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+1}{2x-2} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{x+3}{2x+2} \right) \cdot \frac{4x^2-4}{5}$

a) Tìm điều kiện xác định của P

b) Chứng minh rằng khi P xác định thì giá trị của P không phụ thuộc vào x

Bài 2. a) Cho x, y, z là ba số thỏa mãn $xyz = 1$ và $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Tính giá trị của biểu thức $P = (x^9 - 1)(y^{2020} - 1)(z^{2021} - 1)$

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2 và tổng $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Viết phương trình đường thẳng (d).

Bài 3. a) Cho phương trình $\frac{m+3}{x+1} - \frac{5-3m}{x-2} = \frac{mx+3}{x^2-x+2}$ (m là tham số). Tìm m để phương trình vô nghiệm

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2 \end{cases}$$

Bài 4. a) Cho tam giác ABC vuông tại A, có D là chân đường phân giác trong của góc A, H là chân đường vuông góc hạ từ A (D, H thuộc BC), $BD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Tính độ dài CH.

b) Tứ giác ABCD có đường tròn đường kính AD tiếp xúc với BC và đường tròn đường kính BC tiếp xúc với AD. Chứng minh rằng $\widehat{ACD} = \widehat{BAC}$.

c) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có đường cao AH (H thuộc BC). Tia phân giác của $\widehat{CAH}$ cắt CH tại K, gọi M là trung điểm của AC, MK cắt AH tại N. Chứng minh rằng AK song song với BN.

Bài 5. a) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{4c}{a+b} > 2$.

b) Anh A vào làm ở công ty X với mức lương ban đầu là 10 triệu đồng/tháng. Nếu hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng làm việc, lương của anh sẽ được tăng thêm 20% so với mức lương mà anh đang hưởng tại thời điểm đó. Hỏi bắt đầu từ tháng thứ mấy kể từ khi vào làm việc tại công ty X, tiền lương mỗi tháng của anh Anhiều hơn 20 triệu đồng (Biết rằng trong suốt thời gian làm ở công ty X, anh A luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ).

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – VĨNH PHÚC (2020 – 2021)

Bài 1.

a) Điều kiện xác định: $x \neq \pm 1$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{(x+1)^2}{2(x-1)(x+1)} + \frac{3}{x^2-1} - \frac{(x+3)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} \right] \cdot \frac{4x^2-4}{5} \\ &= \frac{x^2+2x+1+3-x^2-2x+3}{2(x^2-1)} \cdot \frac{4x^2-4}{5} \\ &= \frac{7 \cdot 4 \cdot (x^2-1)}{2(x^2-1) \cdot 5} \\ &= \frac{14}{5} \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.

a) Ta có:

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{xy + yz + zx}{1} = xy + yz + zx$$

$$\text{Thấy: } (x-1)(y-1)(z-1) = (xy - x - y + 1)(z-1) = 1 - xy - xz - yz + x + y + z - 1 = 0$$

Suy ra: $x=y=z=1$

Thay vào P ta được: $P=0$

b) Ta có: $OA = \left| \frac{b}{a} \right|, OB = |b|$

$$S_{OAB} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 2 \Leftrightarrow OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow b^2 = 4|a|$$

$$OA + OB \geq 2\sqrt{OA \cdot OB} = 2\sqrt{4} = 4$$

$$\text{Min}(OA+OB)=4. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } OA=OB \Rightarrow \left| \frac{b}{a} \right| = |b| \Leftrightarrow |b| \left(\frac{1}{|a|} - 1 \right) = 0 \Rightarrow |a| = 1$$

$$\text{Với } |a|=1 \Rightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm 2$$

Vậy phương trình (d): $y=x+2; y=x-2; y=-x+2; y=-x-2$

Bài 3.

a) Phương trình tương đương với:

$$(m+3)(x-2) - (5-3m)(x+1) = mx + 3$$

$$\Leftrightarrow (-2-3m)x = -m+14$$

$$\text{Để phương trình vô nghiệm thì: } \begin{cases} -2-3m=0 \\ -m+14 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-2}{3}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{-2}{3}$$

b) Điều kiện xác định: $x^2 \geq 2y+1$

Ta có:

$$x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy \Leftrightarrow (x-y)(x^2-2y) = 0 \Leftrightarrow x=y \text{ (t/m)}, x^2 = 2y \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } x=y, \text{ ta có: } x^3 - 6x^2 + 12 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 14) - 6(x^2 - 2x - 1) = 0$$

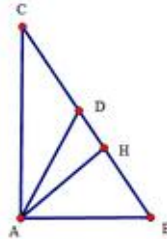
Đặt: $x^2 - 2x - 1 = a \geq 0, x - 2 = b$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 2a + \sqrt[3]{b^3 + 6a^2} = b \\ \sqrt[3]{b^3 + 6a^2} = b - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a^3 + 6b^2a - 12ba^2 + 6a^2 = 0 \\ \sqrt[3]{b^3 + 6a^2} = b - 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = y = \pm\sqrt{2} + 1$$

Bài 4.

a)



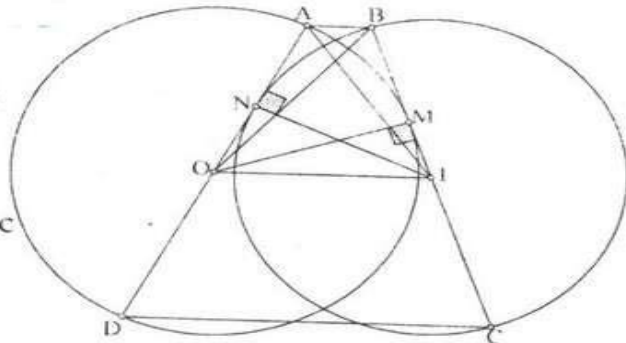
$$AD \text{ là đường phân giác của góc } A \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} \Rightarrow AB = \frac{3}{4} AC$$

$$\text{Mà } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 14^2 = \frac{9}{16} AC^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 11,22$$

$$\text{Áp dụng hệ thức lượng trong } \triangle ABC \text{ có: } AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow 125,44 = CH \cdot 14 \Rightarrow CH = 8,96$$

b)

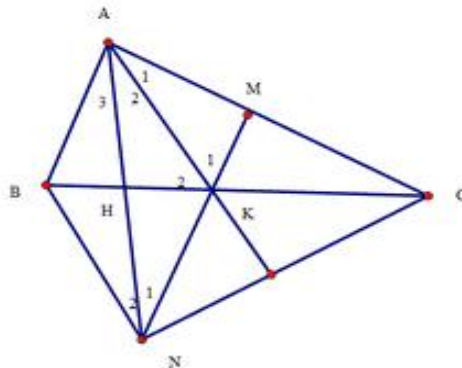
Gọi O, I lần lượt là tâm của các đường tròn đường kính AD, BC. Cần chứng minh $AB \parallel OI$ cho ta nghĩ đến các điểm M, N là tiếp điểm của đường tròn (O) tiếp xúc với BC, đường tròn (I) tiếp xúc với AD.



$$IN = \frac{BC}{2}, OM = \frac{AD}{2}, OM \perp BC, IN \perp AD \text{ giúp ta có } S_{AOI} = S_{BOI}$$

Từ đó có được $AB \parallel OI$.

c)



Xét $\triangle ANC$ có phân giác AK, trung tuyến NM, đường cao AH đồng quy tại K $\Rightarrow \triangle ANC$ đều $\Rightarrow NM \perp AC$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A_3} = 30^\circ = \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$

$$\text{Lại có: } AB \perp AC, NM \perp AC \Rightarrow AB \parallel NM \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_2}$$

$$\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{N_2} = 30^\circ \quad (1)$$

$$\text{Xét } \triangle AMK \text{ vuông tại M có } \widehat{A_2} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{K_1} = 60^\circ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \widehat{BNM} = \widehat{K_1} = 60^\circ \Rightarrow AK \parallel BN$$

Bài 5.

$$\text{a) Đặt: } x=b+c, y=c+a, z=a+b \text{ (x,y,z>0). Ta được: } a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{4c}{a+b} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{4(x+y-z)}{2z}$$

$$= \frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{2(x+y)}{z} - 3$$

$$= \left(\frac{y}{2x} + \frac{x}{2y} \right) + \left(\frac{z}{2x} + \frac{2x}{z} \right) + \left(\frac{z}{2y} + \frac{2y}{z} \right) - 3 \geq 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 + 2 - 3 = 2$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \begin{cases} x=y \\ z=2x \Rightarrow 2x=2y=z \\ z=2y \end{cases} \text{ Khi đó } c = \frac{x+y-z}{2} = 0 \text{ (vô lí vì } c>0)$$

$$\text{Vậy dấu “=” không xảy ra nên } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{4c}{a+b} > 2$$

b) Sử dụng công thức lãi kép $T = A(1+r)^N$ với A là số tiền ban đầu, N là số kì hạn, r là lãi suất và T là số tiền có được sau N kì hạn.

Gọi N là số lần tăng lương của anh A đến khi lương nhiều hơn 20 triệu, khi đó:

$$T = 10(1+20\%)^N > 20 \Leftrightarrow 1,2^N > 2 \Rightarrow N = 4$$

Vậy sau 4 lần tăng lương hay sau 4.6=24 tháng thì đến tháng thứ 25 anh A sẽ có mức lương 20 triệu