

(Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Câu 1 (4,0 điểm):

1) Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{x\sqrt{x} + 8} \cdot \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4} \right)$ với điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Sau khi rút gọn biểu thức A, hãy so sánh A và $\sqrt{A}$.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y(y^2 + 2y - 4x) = 0$.

Câu 2 (5,0 điểm):

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} + \sqrt{(x+2)(5-x)} = 4$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

Câu 3 (5,0 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC đồng quy tại H (các điểm D, E và F lần lượt thuộc các cạnh BC, AC và AB). Các đường thẳng AD, BE và CF lần lượt cắt đường tròn (O) tại K, M và N (các điểm K, M và N lần lượt không trùng với các điểm A, B và C).

a) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

b) MK cắt AC tại P, NK cắt AB tại Q. Chứng minh ba điểm Q, H, P thẳng hàng.

c) Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{CM}{CF} + \frac{AN}{AD} + \frac{BK}{BE}$.

Câu 4 (3,0 điểm): Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng r và $BC = a$. Chứng minh $\frac{a}{r} \geq 2(\sqrt{2} + 1)$.

Câu 5 (3,0 điểm): Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$.