

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức

$$P = \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$$
 nhận giá trị nguyên

2. Cho phương trình $2x^2 - 3x + 2m = 0$. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm

phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa : $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = 1$

Câu 2. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 - x} = \frac{1}{2}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{3x+2y} = -1(1) \\ \sqrt{x+y} = y-x(2) \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên p, q sao cho $p^2 + 3pq + q^2$ là một số chính phương

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC cân tại A (với $BAC < 60^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC . CMR: $MA > MB + MC$
2. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn tâm O , gọi D là trung điểm của BC và E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của D lên AC, AB . Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AO và BC theo thứ tự tại M và N
- a) CMR: tứ giác $AMDN$ nội tiếp
- b) Gọi K là giao điểm của AB và ED, L là giao điểm của AC và FD, H là trung điểm của KL và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . CMR: $HI \perp EF$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y là hai số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1. ĐK: $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - x + 1 - x + 9}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

Với $x \in \mathbb{Q}, x \geq 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \geq -1; \sqrt{x} - 1 \neq 0$. Ta có:

$$P = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \in \{-1; 1; 2\} \Rightarrow x \in \{0; 4; 9\} \text{ (tmdk)}$$

2. Ta có:

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 \neq 0 \\ \frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 \neq 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 x_2)^2 = (x_1 x_2)^2; \Delta = 9 - 16m \end{cases}$$

Do đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 x_2 = m \\ \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 16m > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 x_2 = m \\ x_1 x_2 \neq 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (x_1 x_2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{16} \\ m \neq 0 \\ \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 4m = m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{16} \\ m \neq 0 \\ 4m^2 + 16m - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{1}{2}(tm) \\ m_2 = -\frac{9}{2}(tm) \end{cases}$$

Câu 2.

1) Điều kiện: $x \neq 0$; $x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$, Vì $x \neq 0$ nên:

$$\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 - x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}}{x + 3 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \quad (1) \text{ (chia cả tử và mẫu của vế trái cho } x^2 \neq 0)$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$, được phương trình:

$$\frac{t^2 + 1}{t + 3} = \frac{1}{2} \quad (DK : t \neq -3) \Rightarrow 2t^2 + 2 = t + 3 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \end{cases}$$

$$*) t = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} (tm)$$

$$*) t = -1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} (tm)$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

2) Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+y}+1=\sqrt{3x+2y} \Leftrightarrow (y-x)+1=\sqrt{3x+2y} \left(\text{thay } \sqrt{x+y}=y-x \right)$$

$$\Leftrightarrow y=4x-1(3). \text{Thay (3) vào (2),}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=y-x \Leftrightarrow \sqrt{5x-1}=3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2-6x+1=5x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2-11x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x=1 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=\frac{2}{9} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (1; 3)$$

Câu 3.

Với p, q là số nguyên tố sao cho $p^2 + 3pq + q^2$ là một số chính phương

$$\Leftrightarrow p^2 + 3pq + q^2 = a^2 (a \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (p+q)^2 + pq = a^2$$

$$\Leftrightarrow (a-p-q)(a+p+q) = pq$$

Mà p, q là số nguyên tố nên $a-p-q < a+p+q$; $a+p+q > 2$ nên có các trường hợp:

$$\text{Th1: } \begin{cases} a-p-q=1 \\ a+p+q=pq \end{cases} \Leftrightarrow 1+2p+2q=pq \Leftrightarrow (p-2)(q-2)=5 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} p-2=1 \\ q-2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} p-2=5 \\ q-2=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} p=3 \\ q=7 \end{cases} \\ \begin{cases} p=7 \\ q=3 \end{cases} \end{cases} (tm)$$

$$\text{Th2: } \begin{cases} a-p-q=p \\ a+p+q=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-p-q=p \\ a+p=0 \end{cases} (ktm \text{ do } a+p > 2) \Rightarrow \text{VN}$$

$$\text{Th3: } \begin{cases} a-p-q=q \\ a+p+q=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-p-q=q \\ a+q=0 \end{cases} (ktm \text{ do } a+q > 3) \Rightarrow \text{VN}$$

Vậy 2 số nguyên tố p, q cần tìm là 3 và 7.

Câu 4.

1)

Ta có: $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{2xy} \geq \frac{[(x+y)+(x+y)]^2}{x^2+y^2+2xy} = \frac{4.(x+y)^2}{(x+y)^2} = 4$ (bất đẳng thức cô si dạng

phân thức) (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{2xy} \Leftrightarrow x=y$)

Lại có: $\frac{(x+y)^2}{2xy} \geq \frac{4xy}{2xy} = 2$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$)

$\Rightarrow A = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{2xy} + \frac{(x+y)^2}{2xy} \geq 4 + 2 = 6$

Vậy $\text{Min } A = 6 \Leftrightarrow x = y$