

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Họ và tên, chữ ký: Cán bộ coi thi thứ nhất:

Cán bộ coi thi thứ hai:

Câu 1 (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \sqrt{2a + 6\sqrt{2a - 9}} + \sqrt{2b - 6\sqrt{2b - 9}}$, trong đó a, b là các số thực thỏa mãn $a \geq \frac{9}{2}; b \geq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của P khi $a = \frac{1}{2}(13 + 2\sqrt{3}); b = 8 + 2\sqrt{3}$

2. Giải hệ pt:
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - 2y\sqrt{x-1} = 2x - 6y \end{cases}$$

Câu 2 (4,0 điểm)

1. Cho đa thức $Q(x) = x^2 - ax + b$, trong đó a, b là các số nguyên. Biết rằng tồn tại ba số nguyên phân biệt m, n, p ($1 \leq m, n, p \leq 9$) sao cho $Q(m) = Q(n) = -3; Q(p) = 11$.

a) Chứng minh rằng $(m - p)(n - p) = 14$

b) Tìm tất cả các cặp số $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

2. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2024$. Chứng minh:

$$\frac{a}{a + \sqrt{2024a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2024b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2024c + ab}} \leq 1$$

Câu 3 (3,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn: $(x^2 - 4)^2 = 3y^4 + 12y^2 + 25 + 2x^2y^2$, trong đó x là số nguyên, y là số nguyên tố.

2. Cho x, y là hai số tự nhiên thỏa mãn $x > y > 0$. Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho 3 thì $x^3 - y^3$ chia hết cho 9.

Câu 4 (6,0 điểm)

1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh 2. Đường tròn tâm O bán kính 1 tiếp xúc với BC tại trung điểm của BC . M là điểm di động trên (O) . Tìm giá trị lớn nhất của AM .

2. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tia AI cắt (O) tại điểm thứ 2 là D .

a) Chứng minh tam giác IDB cân và D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC .

b) Đường thẳng OD cắt (O) tại điểm E (khác D) và cắt BC tại điểm F . Chứng minh $ID \cdot IE = IF \cdot DE$

c) Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ điểm O đến các cạnh BC, CA, AB ; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Chứng minh $x + y + z = R + r$.

Câu 5 (3,0 điểm)

1. Cho bảng ô vuông 3×3 (gồm 3 dòng và 3 cột). Người ta ghi tất cả các số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, n\}$ ($n \in \mathbb{N}; n > 8$) vào các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông ghi một số sao cho tổng các số trong mỗi dòng đều bằng nhau.

a) Hãy chỉ ra một cách ghi các số vào trong bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán khi $n = 9$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Mỗi điểm trên mặt phẳng đều được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ, Chứng minh rằng tồn tại một tam giác đều có ba đỉnh được tô cùng màu.

----- HẾT -----

I. Hướng dẫn chung.

1. Bài làm của HS đúng đến đâu cho điểm đến đó.
2. Đối với bài hình: Nếu vẽ sai hình hoặc không vẽ hình thì không cho điểm những phần có liên quan đến hình sai hoặc thiếu đó; **HS không làm được ý trên, vẫn có thể sử dụng kết quả để làm ý dưới.**
3. Nếu HS làm bài không theo cách nêu trong HDC mà đúng thì vẫn cho điểm đủ từng phần như HD, thang điểm chi tiết do tổ chấm thống nhất.
4. Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong HD phải đảm bảo không sai lệch và đảm bảo thống nhất thực hiện trong toàn hội đồng chấm.
5. Một số lưu ý khác:
 - 5.1. Trong Câu 1.1 HS không rút gọn biểu thức mà thay trực tiếp giá trị của $a = \frac{1}{2}(13+2\sqrt{3})$; $b = 8+2\sqrt{3}$ để tính giá trị của P thì không cho điểm toàn câu.
 - 5.2. Trong Câu 2.1 HS không chứng minh được trọn vẹn $(m-p)(n-p)=14$, sử dụng kết quả này để làm câu b) thì vẫn chấm câu b) theo HDC.

II. Hướng dẫn chi tiết.

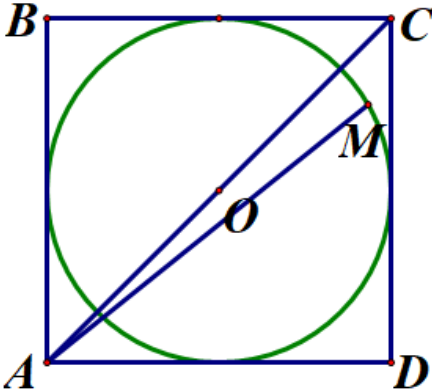
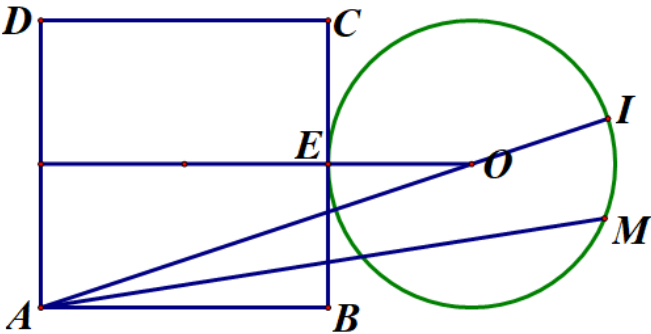
Câu	Hướng dẫn	Điểm
Câu 1 (4,0đ)	1 (2,0 điểm): Cho biểu thức $P = \sqrt{2a+6\sqrt{2a-9}} + \sqrt{2b-6\sqrt{2b-9}}$, trong đó a, b là các số thực thỏa mãn $a \geq \frac{9}{2}$; $b \geq 9$.	
	a) (1,0 điểm): Rút gọn biểu thức P . $P = \sqrt{2a+6\sqrt{2a-9}} + \sqrt{2b-6\sqrt{2b-9}}$ $= \sqrt{(\sqrt{2a-9}+3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2b-9}-3)^2}$	0,25
	$= \sqrt{2a-9}+3 + \sqrt{2b-9}-3 $	0,25
	$= \sqrt{2a-9}+3 + \sqrt{2b-9}-3$	0,25
	$= \sqrt{2a-9} + \sqrt{2b-9}$	0,25
	b) (1,0 điểm): Tính giá trị của P khi $a = \frac{1}{2}(13+2\sqrt{3})$; $b = 8+2\sqrt{3}$ Ta thấy $\begin{cases} a = \frac{1}{2}(13+2\sqrt{3}) \\ b = 8+2\sqrt{3} \end{cases}$ tm đk $a \geq \frac{9}{2}$; $b \geq 9$ Thay $a = \frac{1}{2}(13+2\sqrt{3})$; $b = 8+2\sqrt{3}$ vào bt P , ta được: $P = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}(13+2\sqrt{3}) - 9} + \sqrt{2(8+2\sqrt{3}) - 9}$	0,25

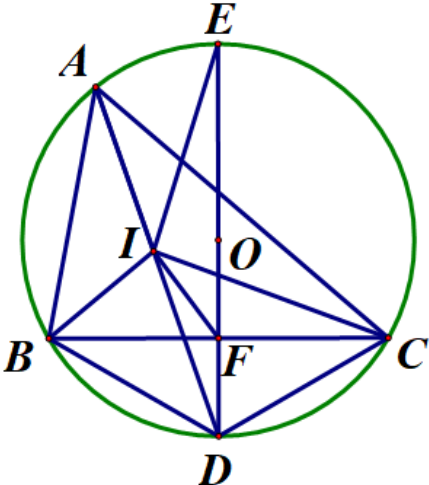
Câu	Hướng dẫn	Điểm
	$= \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$	0,25
	$= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$	0,25
	$= \sqrt{3}+1 + 2+\sqrt{3} = \sqrt{3}+1+2+\sqrt{3} = 3+2\sqrt{3}$	0,25
	2 (2,0 điểm): Giải hệ pt $\begin{cases} xy+x+y = x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-2y\sqrt{x-1} = 2x-6y \end{cases}$	
	ĐK: $x \geq 1; y \geq 0$	0,25
	$xy+x+y = x^2-xy-2y^2 \quad (1) \Leftrightarrow x^2-xy-2y^2-(x+y) = 0$ $\Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$	0,25
	TH1: $x+y=0$ loại do ĐK	
	TH2: $x-2y-1=0 \Leftrightarrow x=2y+1$ Thay vào (2) ta được: $(2y+1)\sqrt{2y}-2y\sqrt{2y} = 2(2y+1)-6y$	0,25
	$\Leftrightarrow 2y+\sqrt{2y}-2=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2y}=1 \\ \sqrt{2y}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \text{ (tm)}$ (HS có thể dùng cách khác để tìm ra y)	0,25
	Với $y = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2 \text{ (tm)}$	0,25
	Vậy hpt đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(2; \frac{1}{2}\right)$	
Cách trình bày khác (TH2)	HS có thể trình bày: $x-2y-1=0 \Leftrightarrow 2y=x-1$ Thay vào (2) ta được: $x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x-1} = 2x-3(x-1)$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1=9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \text{ (tm)}$ (HS có thể lập luận cáchs khác để tìm ra $x=2$)	0,25
	Với $x=2 \rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ (tm)}$	0,25
	Vậy hpt đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(2; \frac{1}{2}\right)$ Chú ý: HS có thể không ghi tm sau khi tìm được giá trị của y (hoặc x), từ đó tìm ra giá trị của x (hoặc y) tương ứng. Khi đó chấm trước cho HS	0,25
	1 (2,0 điểm): Cho đa thức $Q(x) = x^2 - ax + b$, trong đó a, b là các số nguyên. Biết rằng tồn tại ba số nguyên phân biệt m, n, p ($1 \leq m, n, p \leq 9$) sao cho	

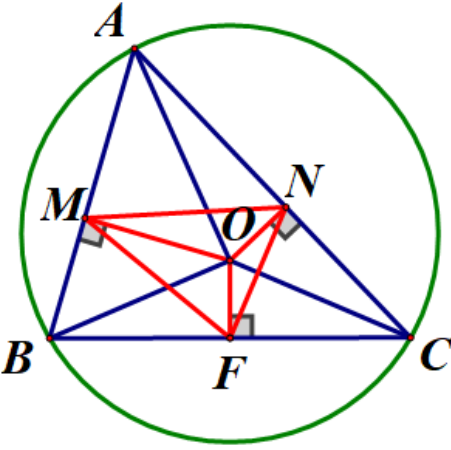
Câu	Hướng dẫn	Điểm															
	$Q(m) = Q(n) = -3; Q(p) = 11.$ a) Chứng minh rằng $(m-p)(n-p) = 14$ b) Tìm tất cả các cặp số $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán																
	a) Ta có: $Q(m) = Q(n) = -3 \rightarrow \begin{cases} m^2 - am + b + 3 = 0 \\ n^2 - qn + b + 3 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow m; n$ là hai nghiệm của pt: $x^2 - ax + b + 3 = 0$ Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} m+n = a \\ m.n = b+3 \end{cases}$	0,25															
	Ta có: $Q(p) - Q(m) = 11 - (-3) = 14$ (1)	0,25															
	Mà $Q(p) - Q(m) = (p^2 - ap + b) - (m^2 - am + b) = (p^2 - m^2) - a(p - m)$ $= (p - m)(p + m - a) = (p - m)(p + m - m - n)$ $= (p - m)(p - n) = (m - p)(n - p)$ (2)	0,25															
	Từ (1) và (2) $\rightarrow (m - p)(n - p) = 14$	0,25															
	b) Theo ý a ta có: $(m - p)(n - p) = 14$ Suy ra $m - p; n - p$ là ước của 14 Mà $1 \leq m, n, p \leq 9 \rightarrow \begin{cases} -8 \leq m - p \leq 8 \\ -8 \leq n - p \leq 8 \end{cases}$	0,25															
	Ta có $14 = 1.14 = 2.7 = -1.(-14) = -2.(-7)$ Vai trò của 2 số nguyên m, n là như nhau nên không giảm tính tổng quát, giả sử $m > n \rightarrow m - p > n - p$ (3) Nên: $(m - p)(n - p) = 7.2 = (-2)(-7)$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $\begin{cases} m - p = 7 \\ n - p = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m - p = -2 \\ n - p = -7 \end{cases}$ (HS có thể lập luận khác thì cho điểm tương tự)	0,25															
	*Nếu $\begin{cases} m - p = 7 \\ n - p = 2 \end{cases} \rightarrow m = p + 7 = n + 5$ Mà: $m \leq 9$ nên $p + 7 \leq 9 \rightarrow p \leq 2$. Kết hợp với $1 \leq p \rightarrow 1 \leq p \leq 2$ Ta có bảng: <table border="1"> <tr> <td>p</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr> <td>m</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr> <td>n</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr> <td>$a = m + n$</td><td>11</td><td>13</td></tr> <tr> <td>$b = mn - 3$</td><td>21</td><td>33</td></tr> </table>	p	1	2	m	8	9	n	3	4	$a = m + n$	11	13	$b = mn - 3$	21	33	0,25
p	1	2															
m	8	9															
n	3	4															
$a = m + n$	11	13															
$b = mn - 3$	21	33															

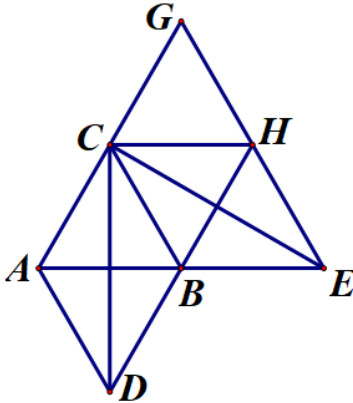
Câu	Hướng dẫn	Điểm															
	*Nếu $\begin{cases} m-p=-2 \\ n-p=-7 \end{cases} \rightarrow p=m+2=n+7$ Mà: $p \leq 9$ nên $n+7 \leq 9 \rightarrow n \leq 2$. Kết hợp với $1 \leq n \rightarrow 1 \leq n \leq 2$ Ta có bảng: <table> <tr> <td>n</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr> <td>m</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr> <td>p</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr> <td>$a=m+n$</td><td>7</td><td>9</td></tr> <tr> <td>$b=mn-3$</td><td>3</td><td>11</td></tr> </table> Vậy $(a, b) \in \{(11; 21), (13; 33), (7; 3), (9; 11)\}$ là giá trị cần tìm	n	1	2	m	6	7	p	8	9	$a=m+n$	7	9	$b=mn-3$	3	11	0,25
n	1	2															
m	6	7															
p	8	9															
$a=m+n$	7	9															
$b=mn-3$	3	11															
	2. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2024$. Chứng minh: $\frac{a}{a+\sqrt{2024a+bc}} + \frac{b}{b+\sqrt{2024b+ca}} + \frac{c}{c+\sqrt{2024c+ab}} \leq 1$																
	*Cách 1: Ta có $2024a+bc=(a+b+c)a+bc$	0,25															
	$=a^2+ab+ac+bc=a^2+bc+a(b+c)$	0,25															
	Theo AM-GM cho hai số dương ta có: $a^2+bc \geq 2a\sqrt{bc}$	0,25															
	Do đó: $a^2+bc+a(b+c) \geq 2a\sqrt{bc}+a(b+c)=a(b+c+2\sqrt{bc})=a(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$	0,25															
	Ta có: $\frac{a}{a+\sqrt{2024a+bc}} \leq \frac{a}{a\sqrt{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}} = \dots = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \quad (1)$	0,25															
	Tương tự: $\frac{b}{b+\sqrt{2024b+ac}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \quad (2)$	0,25															
	$\frac{c}{c+\sqrt{2024c+ab}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \quad (3)$	0,25															
	Cộng theo vế của (1); (2); (3) $\rightarrow$ đpcm	0,25															
	*Cách 2: Ta có $2024a+bc=(a+b+c)a+bc$	0,25															
	$=(a+b)(a+c)$	0,25															
	Áp dụng bất Bunhiacopxki ta có: $(a+b)(a+c) = \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 \right] \left[(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{a})^2 \right]$	0,25															
	$\geq (\sqrt{ab} + \sqrt{ac})^2$	0,25															
	Ta có: $\frac{a}{a+\sqrt{2024a+bc}} \leq \frac{a}{a+\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{ac})^2}} = \dots = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} \quad (1)$	0,25															
	Chứng minh tương tự, cộng theo vế $\rightarrow$ đpcm	0,75															

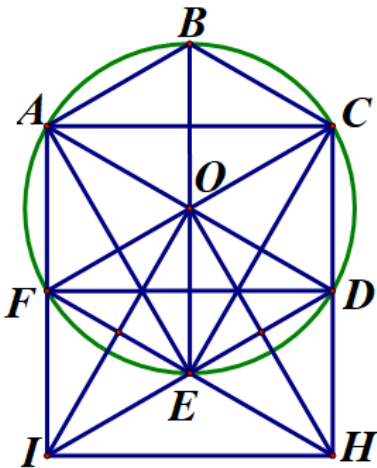
Câu	Hướng dẫn	Điểm
Câu 3 (3,0đ)	1 (1,5 điểm): Tìm tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn: $(x^2 - 4)^2 = 3y^4 + 12y^2 + 25 + 2x^2y^2$, trong đó x là số nguyên, y là số nguyên tố.	
	Cách 1: Ta có $(x^2 - 4)^2 = 3y^4 + 12y^2 + 2x^2y^2 + 25$ $\Leftrightarrow (x^2 - 3y^2 - 9)(x^2 + y^2 + 1) = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 3y^2 - 9 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 = 3y^2 + 9$ (1) $\rightarrow x^2 : 3$ Mà 3 là số nguyên tố nên $x : 3 \rightarrow x = 3m$ ($m \in \mathbb{N}^*$)	0,25
	Thay $x = 3m$ vào (1) ta có: $9m^2 = 3y^2 + 9 \rightarrow 3y^2 : 9$	0,25
	$\rightarrow y^2 : 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $y : 3$ $\rightarrow y = 3$ (Vì y nguyên tố)	0,25
	$\rightarrow x^2 = 3y^2 + 9 = 3 \cdot 3^2 + 9 = 36 \rightarrow x = \pm 6$	0,25
	Vậy $(x; y) \in \{(-6; 3), (6; 3)\}$	0,25
	Cách 2: Ta có $(x^2 - 4)^2 = 3y^4 + 12y^2 + 2x^2y^2 + 25$ $\Leftrightarrow (x^2 - 3y^2 - 9)(x^2 + y^2 + 1) = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 3y^2 - 9 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 3y^2 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 3y^2$ (1) $\rightarrow [(x - 3)(x + 3)] : 3 \rightarrow (x - 3) : 3$ hoặc $(x + 3) : 3$	0,25
	Mà $(x + 3) - (x - 3) = 6 : 3$ nên $\begin{cases} x + 3 : 3 \\ x - 3 : 3 \end{cases} \rightarrow [(x + 3)(x - 3)] : 9$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) $\rightarrow y^2 : 3$. Mà 3 là số nguyên tố nên $y : 3 \rightarrow y = 3$ (Vì y là số nguyên tố)	0,25
	$\rightarrow x^2 = 3y^2 + 9 = 3 \cdot 3^2 + 9 = 36 \rightarrow x = \pm 6$	0,25
	Vậy $(x; y) \in \{(-6; 3), (6; 3)\}$	0,25
	2 (1,5 điểm): Cho x, y là hai số tự nhiên thỏa mãn $x > y > 0$. Chứng minh rằng nếu $x^3 - y^3$ chia hết cho 3 thì $x^3 - y^3$ chia hết cho 9.	
	Ta có: $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$	0,5
	Theo gt $(x^3 - y^3) : 3$; Hơn nữa $3xy(x - y) : 3$ nên $(x - y)^3 = x^3 - y^3 + 3xy(x - y) : 3$	0,25
	Do 3 là số nguyên tố nên $(x - y) : 3$	
	Do $(x - y) : 3$, nên $(x - y)^3 : 9$ Hơn nữa, do $(x - y) : 3$ nên $3xy(x - y) : 9$	0,25
	$\rightarrow x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) : 9$	0,25
Câu 4	1 (1,5 điểm): Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh 2. Đường tròn tâm O bán kính 1	

Câu	Hướng dẫn	Điểm
(6,0 đ)	tiếp xúc với BC tại trung điểm của BC . M là điểm di động trên (O) . Tìm giá trị lớn nhất của AM .	
		
		
	Đường tròn tâm O bán kính 1 tiếp xúc với BC tại trung điểm của BC . Khi đó xảy ra hai trường hợp	
	TH1: Đường tròn tâm O là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ Hiển nhiên $AM < AC = \sqrt{8}$	0,25
	TH2: Đường tròn tâm O tiếp xúc với cạnh BC tại E là trung điểm của BC và O nằm ngoài hình vuông $ABCD$. Gọi G là trung điểm của AD . Khi đó G, E, O thẳng hàng và $AO = \sqrt{GA^2 + GO^2} = \sqrt{10}$	0,25
	Xét ba điểm $A, O, M \Rightarrow AM \leq AO + OM$	0,25
	$\Rightarrow AM \leq \sqrt{10} + 1$	
	Dấu “=” xảy ra khi ba điểm A, O, M thẳng hàng và O nằm giữa A, M	0,25
	So sánh hai TH1 và TH2 ta thấy $\sqrt{8} < \sqrt{10} + 1$ nên giá trị lớn nhất của AM là $\sqrt{10} + 1$	0,25
	2 (4,5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tia AI cắt (O) tại điểm thứ hai là D . a) Chứng minh tam giác IDB cân và D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC b) Đường thẳng OD cắt (O) tại điểm E (khác D) và cắt cạnh BC tại điểm F . Chứng minh $ID.IE = IF.DE$ c) Gọi $x; y; z$ lần lượt là khoảng cách từ điểm O đến các cạnh BC, CA, AB ; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .	

Câu	Hướng dẫn	Điểm
	Chứng minh rằng $x + y + z = R + r$ Hình vẽ: 	
	a) (1,5 điểm). Chứng minh tam giác IDB cân và D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC	
	Ta có $IBD = IBC + DBC = \frac{1}{2}ABC + DAC = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}BAC$ (1)	0,25
	(Do $IBC = \frac{1}{2}ABC$; $DBC = DAC = \frac{1}{2}sd DC$)	
	Mặt khác : $BID = IBA + IAB = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}BAC$ (2) (Do AI, BI lần lượt là phân giác của $BAC; ABC$)	0,25
	Từ (1) và (2) ta được $BID = IBD \Rightarrow$ tam giác DIB cân tại D.	0,25
	Do tam giác DIB cân tại D nên $DB = DI$ (a)	0,25
	Cách 1: Chứng minh tương tự ta có tam giác DCI cân tại D. Khi đó $DI = DC$ (b) Cách 2: Xét tam giác ABC có tia AD là tia phân giác của BAC $\Rightarrow DB = DC \Rightarrow DB = DC$ (b)	0,25
	Từ (a) và (b) suy ra $DB = DC = DI$. Suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC.	0,25
	b) (1,5 điểm). Đường thẳng OD cắt (O) tại điểm E (khác D) và cắt cạnh BC tại điểm F. Chứng minh $ID.IE = IF.DE$	
	Theo kết quả phần a) ta có $DB = DC$ nên tam giác DBC cân tại D. Do đó DO là trung trực của BC, suy ra F là trung điểm của BC.	0,25
	Do DE là đường kính của (O) suy ra $DCE = 90^\circ$.	0,25
	Trong tam giác vuông CDE, có CF là đường cao nên $CD^2 = DF.DE$	0,25
	Do $CD = DI \Rightarrow DI^2 = DF.DE \Rightarrow \frac{DI}{DF} = \frac{DE}{DI}$	0,25
	Xét hai tam giác DIF và DEI có: $\frac{DI}{DF} = \frac{DE}{DI}$; $IDF = EDI$ suy ra tam giác DIF đồng dạng với tam giác DEI	0,25

Câu	Hướng dẫn	Điểm
	Suy ra $\frac{IF}{IE} = \frac{ID}{DE} \Rightarrow ID.IE = IF.DE$	0,25
	c) (1,5 điểm). Gọi $x; y; z$ lần lượt là khoảng cách từ điểm O đến các cạnh BC, CA, AB ; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Chứng minh rằng $x + y + z = R + r$	
	Hình vẽ 	
	Gọi M, N là hình chiếu của O trên AB và AC. Khi đó $x = OF; y = ON; z = OM$ Hơn nữa F, N, M lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB. $MN = \frac{BC}{2}; MF = \frac{AC}{2}; FN = \frac{AB}{2}$	0,25
	Xét tứ giác $AMON$ có: $AMO + ANO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ Nên tứ giác $AMON$ nội tiếp. Áp dụng định lí Ptoleme: $OA.MN = ON.AM + OM.AN$ $\Rightarrow R \cdot \frac{BC}{2} = y \cdot \frac{AB}{2} + z \cdot \frac{AC}{2}$ $\Rightarrow R.BC = y.AB + z.AC \quad (1)$	0,25
	Tương tự: $R.AC = x.AB + z.BC \quad (2)$ $R.AB = x.AC + y.BC \quad (3)$ Cộng từng vế của (1); (2); (3) ta được $R(BC + CA + AB) = (x + y).AB + (y + z).BC + (x + z).AC \quad (*)$	0,25
	Mặt khác ta có: $S_{\triangle ABC} = p.r = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{BC + CA + AB}{2}.r = x \cdot \frac{BC}{2} + y \cdot \frac{AC}{2} + z \cdot \frac{AB}{2}$ $\Rightarrow (BC + CA + AB).r = x.BC + y.AC + z.AB \quad (**)$	0,25
	Cộng vế với vế của (*) và (**) ta được: $(BC + CA + AB)(R + r) = (x + y + z)(BC + CA + AB)$ $\Rightarrow R + r = x + y + z$	0,25
Câu 5	1 (1,5 điểm): Cho bảng ô vuông 3x3 (gồm ba dòng và ba cột). Người ta ghi tất cả	

Câu	Hướng dẫn	Điểm																			
	các số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, n\}$ ($n \in \mathbb{N}; n > 8$) vào các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông ghi 1 số sao cho tổng các số trong mỗi dòng đều bằng nhau. a) Hãy chỉ ra một cách ghi các số vào bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán khi $n = 9$ <table><tr><td>9</td><td>5</td><td>1</td><td rowspan="3">Hoặc</td><td>9</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>8</td><td>4</td><td>3</td><td>8</td><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>7</td><td>2</td><td>6</td><td>7</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	9	5	1	Hoặc	9	4	2	8	4	3	8	6	1	7	2	6	7	3	5	0,5
9	5	1	Hoặc	9		4	2														
8	4	3		8		6	1														
7	2	6		7	3	5															
	b) Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tổng các số được ghi trong bảng 3×3 là $1 + 2 + 3 + \dots + 8 + n = n + 36$ Khi đó tổng các số được ghi trong 1 dòng là $\frac{n + 36}{3}$ Do tổng này là một số nguyên nên $n : 3$ Xét dòng chứa phần tử n. Dòng này có tổng thấp nhất là $n + 1 + 2 = n + 3$ Khi đó $n + 3 \leq \frac{n + 36}{3} \Rightarrow 3n + 9 \leq n + 36 \Rightarrow n \leq \frac{27}{2}$ Do $8 < n \leq \frac{27}{2}; n : 3; n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{9; 12\}$ Với $n = 9$, theo ý a) đã có bảng thỏa mãn nên $n = 9$ thỏa mãn Với $n = 12$, ta có bảng sau thỏa mãn <table><tr><td>12</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>8</td><td>6</td><td>2</td></tr><tr><td>7</td><td>5</td><td>4</td></tr></table> Vậy $n \in \{9; 12\}$ là giá trị cần tìm		12	1	3	8	6	2	7	5	4	0,25									
12	1	3																			
8	6	2																			
7	5	4																			
	2 (1,5 điểm): Mỗi điểm trên mặt phẳng đều được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác đều có ba đỉnh được tô cùng màu. Hình vẽ: 		0,25																		
	Cách lập luận 1: Chọn ba điểm phân biệt bất kì, theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai điểm $A; B$ cùng màu, giả sử màu đỏ. Vẽ tam giác đều CAB		0,25																		

Câu	Hướng dẫn	Điểm
	Nếu C được tô màu đỏ thì tam giác CAB thỏa mãn.	
	Nếu C được tô màu xanh Gọi D là điểm đối xứng với C qua AB Nếu D được tô màu đỏ thì tam giác DAB thỏa mãn	0,25
	Nếu D được tô màu xanh. Gọi E là điểm đối xứng của A qua B - Nếu E được tô màu xanh thì tam giác ECD thỏa mãn	0,25
	- Nếu E được tô màu đỏ * Gọi G là điểm đối xứng của A qua C . H là trung điểm EG .	0,25
	Nếu G được tô màu đỏ thì tam giác GAE thỏa mãn Nếu G tô màu xanh - H cũng được tô màu xanh thì tam giác GCH thỏa mãn - H được tô màu đỏ thì tam giác HBE thỏa mãn	0,25
	Cách lập luận 2:	
	Hình vẽ: 	
	Xét lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp (O) . Vì 7 điểm A, B, C, D, E, F, O được tô bởi hai màu xanh và đỏ nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất bốn điểm được tô cùng màu, giả sử là màu xanh	0,25
	Nếu bốn điểm tô màu xanh trên có chứa điểm O thì tam giác tạo bởi O và hai trong ba điểm còn lại là tam giác cần tìm	0,25
	Nếu 4 điểm tô màu xanh trên không chứa điểm O thì O và tối đa hai điểm còn lại được tô cùng màu đỏ. TH1: Điểm O và chỉ một điểm còn lại tô màu đỏ. Khi đó trong sáu đỉnh của lục giác đều có 5 điểm cùng màu xanh. Không mất tính tổng quát, giả sử điểm tô màu đỏ là điểm A . Khi đó tam giác BDF thỏa mãn.	0,25
	TH2: Điểm O và hai điểm còn lại cùng tô màu đỏ. * Hai điểm này là hai điểm kề nhau của lục giác. Tam giác tạo bởi điểm O và hai đỉnh này thỏa mãn	0,25
	* Hai điểm này tạo thành đường chéo phụ (đường chéo không đi qua tâm của lục giác đều). Không mất tính tổng quát, giả sử hai điểm tô màu đỏ này là D và F . Khi đó tam giác ACE thỏa mãn.	0,25

Câu	Hướng dẫn	Điểm
	* Hai điểm này tạo thành đường chéo chính (đường chéo đi qua tâm O của lục giác đều), Không mất tính tổng quát, giả sử là FC. Khi đó ta có các điểm A, B, D, E tô màu xanh và F, C, O tô màu đỏ. Gọi H là điểm đối xứng của O qua DE (qua hai điểm cùng màu xanh); I là điểm đối xứng của O qua EF. Nếu H tô màu xanh thì tam giác EDH thỏa mãn Nếu H tô màu đỏ, lúc này xét điểm I. - Nếu I tô màu đỏ thì tam giác OHI thỏa mãn - Nếu I tô màu xanh thì tam giác AID thỏa mãn	0,25

---Hết---