

Bài 1. 1) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} - 2} + \frac{2}{x + \sqrt{x}} \right) (\sqrt{x} + 1)$ với $x > 0; x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P. b) Tìm tất cả các số chính phương của x để P là số nguyên.

2) Cho n là số nguyên dương với $n > 1$. Chứng minh rằng

a) $\frac{n-1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^n}$ b) $\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} < 1$.

Bài 2. 1) Một xe máy xuất phát từ A đến B, sau đó 45 phút một ô tô cũng xuất phát từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 30 km/h. Cả hai xe đến B cùng một lúc. Biết khoảng cách AB = 100 km và vận tốc mỗi xe là không đổi. Tính vận tốc của mỗi xe.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x - 3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy

lần lượt tại A và B.

a) Tìm tọa độ của các điểm A, B.

b) Viết phương trình đường thẳng (d') đi qua $M(2; -2)$ cắt đoạn thẳng OA tại C sao cho diện tích tam giác AMC bằng 5 (đơn vị).

Bài 3. 1) Chứng minh rằng $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ là số chính phương với mọi số nguyên n.

2) Giải phương trình $3\sqrt{x-1} = 4 - 2x + \sqrt{x+7}$

3) Cho các số thực không âm a, b thỏa mãn $a + b + c = 1$.

a) Chứng minh rằng $1 \leq \sqrt{8a+1} \leq 3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \sqrt{8a+1} + \sqrt{8b+1} + \sqrt{8c+1}$

Bài 4. 1) Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ và $AB = 8\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$, $CD = 10\text{cm}$. Gọi M là trung điểm của BC, H thuộc CD sao cho BH vuông góc với CD. Tính độ dài BC và chứng minh tam giác AHM vuông.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC > AB$. Trên cạnh AC lấy điểm M (M khác A, C), vẽ tam giác MCP vuông tại C và MP song song với BC. Gọi N là điểm sao cho MCPN là hình chữ nhật, Q là giao điểm của MP và BN.

a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của BN.

b) Chứng minh rằng khi điểm M thay đổi trên cạnh AC thì Q luôn thuộc đường trung tuyến AE của tam giác ABC.

Bài 5. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ABC}$ tù và $AC > AB$, nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC; D là chân đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ (D thuộc BC).

a) Chứng minh rằng các điểm A, M, N, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là giao điểm của AD và MN, đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt BC tại S. Chứng minh rằng tam giác ASD cân.

c) Chứng minh rằng SA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Gọi E là điểm đối xứng với M qua B, đường tròn ngoại tiếp tam giác CME cắt AC tại F. Đường thẳng SA cắt FE, FM lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.