

Hướng dẫn chấm gồm 06 trang

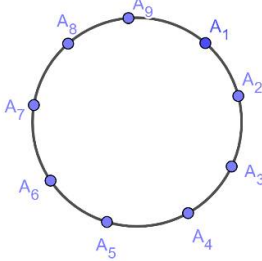
Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 (4 điểm)	Xét x, y, z, t là bốn số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3+1}{y+z} + \frac{y^3+1}{z+t} + \frac{z^3+1}{t+x} + \frac{t^3+1}{x+y}.$	
	Đặt $a = x + y + z + t$ ($a > 0$). + Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có $\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+t} + \frac{1}{t+x} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{(1+1+1+1)^2}{y+z+z+t+t+x+x+y} =$ $= \frac{8}{x+y+z+t} = \frac{8}{a}.$	1,0
	$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+t} + \frac{z^3}{t+x} + \frac{t^3}{x+y} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2+t^2)^2}{x(y+z)+y(z+t)+z(t+x)+t(x+y)}.$	1,0
	+ Mặt khác $x(y+z)+y(z+t)+z(t+x)+t(x+y)$ $= xy + xz + yz + yt + zt + zx + tx + ty$ $\leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}(x^2+z^2) + \frac{1}{2}(y^2+z^2) + \frac{1}{2}(y^2+t^2) +$ $+ \frac{1}{2}(z^2+t^2) + \frac{1}{2}(z^2+x^2) + \frac{1}{2}(t^2+x^2) + \frac{1}{2}(t^2+y^2)$ $= 2(x^2+y^2+z^2+t^2), \text{ suy ra}$ $\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+t} + \frac{z^3}{t+x} + \frac{t^3}{x+y} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2+t^2)^2}{2(x^2+y^2+z^2+t^2)} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+t^2)$ $\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 = \frac{a^2}{8}.$	1,0
	+ Vậy có $P \geq \frac{a^2}{8} + \frac{8}{a} = \frac{a^2}{8} + \frac{4}{a} + \frac{4}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{8} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{a}} = 3\sqrt[3]{2}.$ Khi $x = y = z = t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ thì $P = 3\sqrt[3]{2}$, do đó giá trị nhỏ nhất cần tìm là $3\sqrt[3]{2}$.	1,0

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 2 (4 điểm)	Cho $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ là đa thức với các hệ số thực, có bậc là n và có n nghiệm thực (ở đó $n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 3$). Biết $a_{n-2} = 0$ và $\frac{a_{n-1}}{a_n} > n+1$. Chứng minh rằng $P(x)$ có cả nghiệm dương, nghiệm âm và có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{n+1}\right)$.	
	* Gọi $r_1, \dots, r_n$ là các nghiệm thực của $P(x)$. Do $a_n \neq 0$ nên $r_i \neq 0, \forall i = \overline{1, n}$. Ta thấy $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \dots, \frac{1}{r_n}$ là các nghiệm của đa thức $Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + 1.$	0,5
	+ Theo định lý Vi-ète có: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} < -(n+1) \quad (1)$ và $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{r_i} \cdot \frac{1}{r_j} = 0 \quad (2)$	0,5
	+ Từ (1) suy ra có $\frac{1}{r_i} < 0$ hay $P(x)$ có nghiệm âm. Nếu tất cả các nghiệm r_i đều âm thì $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{r_i} \cdot \frac{1}{r_j} > 0$, mâu thuẫn với (2), do đó $P(x)$ có cả nghiệm dương.	0,5
	* Ta cần chứng minh tồn tại chỉ số i sao cho $-\frac{1}{2} < r_i < \frac{1}{n+1}$ hay $\left(r_i + \frac{1}{2}\right)\left(r_i - \frac{1}{n+1}\right) < 0 \Leftrightarrow r_i^2 + \frac{n-1}{2(n+1)}r_i - \frac{1}{2(n+1)} < 0$. Do $r_i \neq 0$ nên chia hai vế của BĐT này cho r_i^2 được BĐT tương đương cần chứng minh là $\frac{1}{r_i^2} - \frac{n-1}{r_i} > 2(n+1)$.	0,5
	Thật vậy, từ (1) và (2) suy ra $\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i^2} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}\right)^2 > (n+1)^2 \quad (3)$. Từ (1) suy ra $\sum_{i=1}^n \frac{-(n-1)}{r_i} > n^2 - 1 \quad (4)$.	1,0
	Cộng theo vế (3) và (4) có $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{n-1}{r_i}\right) > (n+1)^2 + n^2 - 1 = 2n^2 + 2n$. Đặt i_0 là chỉ số sao cho $\frac{1}{r_{i_0}^2} - \frac{n-1}{r_{i_0}} = \max_{i=\overline{1, n}} \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{n-1}{r_i}\right)$ thì $\frac{1}{r_{i_0}^2} - \frac{n-1}{r_{i_0}} > \frac{2n^2 + 2n}{n} = 2(n+1), \text{ suy ra điều phải chứng minh.}$	1,0

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 3 (4 điểm)	Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm E, F lần lượt thuộc các cạnh AC, AB sao cho EF song song với BC. Các tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt cạnh BC lần lượt tại M, N sao cho N nằm giữa B và M. Gọi K là giao điểm của các đoạn thẳng BE và FN, L là giao điểm của các đoạn thẳng CF và EM a) Gọi S, T lần lượt là giao điểm thứ hai của BE, CF với đường tròn (O). Chứng minh rằng tứ giác $AFKS$ nội tiếp một đường tròn và $\widehat{KAB} = \widehat{LAC}$. b) Gọi X là giao điểm của các đoạn thẳng BE, CF; Y là giao điểm của các đoạn thẳng EN, FM; đường thẳng XY cắt cạnh BC tại điểm P. Chứng minh rằng $\frac{PB}{PC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.	
	Hình vẽ	
3a (3,0 điểm)	*) Vì ME, NF là các tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF nên $\widehat{MEF} = \widehat{EAF} = \widehat{BAC}$; $\widehat{NFE} = \widehat{EAF} = \widehat{BAC}$. Mặt khác, do $EF \parallel BC$ nên ta có $\widehat{BFN} = 180^\circ - \widehat{NFE} - \widehat{AFE} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.	1,0
	Suy ra $\widehat{BFK} = \widehat{BFN} = \widehat{ACB} = \widehat{ASB} = \widehat{ASK}$. Do đó tứ giác $AFKS$ nội tiếp.	0,5
	*) Chứng minh tương tự ta cũng có tứ giác $AELT$ nội tiếp. *) Mặt khác $EF \parallel BC$ nên $\widehat{TSE} = \widehat{TSB} = \widehat{TCB} = \widehat{CFE}$. Suy ra tứ giác $EFTS$ nội tiếp.	1,0
	Khi đó $\widehat{KAB} = \widehat{KAF} = \widehat{KSF} = \widehat{ESF} = \widehat{ETF} = \widehat{ETL} = \widehat{EAL} = \widehat{LAC}$	0,5

Bài	Nội dung	Điểm
3b (1,0 điểm)	*) Theo chứng minh trên ta có $\widehat{MEF} = \widehat{NFE} = \widehat{BAC}$ Kết hợp với $MN \parallel EF$ ta có tứ giác $MNFE$ là hình thang cân. Suy ra $EM = FN$	0,5
	) Cũng theo chứng minh trên ta có $\widehat{BFN} = \widehat{ACB} = \widehat{ECM}$ Tương tự, ta cũng có $\widehat{CEM} = \widehat{ABC} = \widehat{FBN}$. Suy ra $\triangle BFN \sim \triangle ECM$. Khi đó, vì $EM = FN$ và $EF \parallel BC$ nên $\frac{BN}{CM} = \frac{BN}{ME} \cdot \frac{FN}{CM} = \frac{FB}{EC} \cdot \frac{FB}{EC} = \frac{FB^2}{EC^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$ ()	
	*) Áp dụng định lý Menelaus trong các tam giác FMC , ENB với cát tuyến XYP ta có $\frac{PM}{PC} \cdot \frac{XC}{XF} \cdot \frac{YF}{YM} = 1$ (1) $\frac{PN}{PB} \cdot \frac{XB}{XE} \cdot \frac{YE}{YN} = 1$ (2)	0,5
	Mặt khác, do $EF \parallel BC$ nên $\frac{XB}{XE} = \frac{XC}{XF}$; $\frac{YE}{YN} = \frac{YF}{YM}$ (3) Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{PM}{PC} = \frac{PN}{PB}$. Suy ra $\frac{PB}{PC} = \frac{PN}{PM} = \frac{PB - PN}{PC - PM} = \frac{NB}{MC}$. Kết hợp với (*) ta suy ra $\frac{PB}{PC} = \frac{BN}{CM} = \frac{AB^2}{AC^2}$.	
Bài 4 (4 điểm)	Xét p là số nguyên tố thỏa mãn $p^2 \mid (2^{p-1} - 1)$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , số $(p-1)(p! + 2^n)$ có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.	
	Rõ ràng p là số nguyên tố lẻ và $p > 5$. Do đó, $(p-1)$ và $(p! + 2^n)$ là các số chẵn. Vì thế, $A = (p-1)(p! + 2^n)$ có ước nguyên tố là 2.	0,5
	Hơn nữa, nếu q là một ước nguyên tố lẻ của $(p-1)$, thì q không là ước của $(p! + 2^n)$, nên từ đây ta chỉ cần chứng minh mỗi số $p-1$ và $p! + 2^n$ đều có một ước nguyên tố lẻ là đủ.	0,5
	*) Chứng minh $(p-1)$ có một ước nguyên tố lẻ. Thật vậy, giả sử $(p-1)$ không có ước nguyên tố lẻ, khi đó $p-1 = 2^m$ hay $p = 1 + 2^m$. Do $p > 3$ là số nguyên tố nên m không có ước nguyên tố lẻ, hay $m = 2^k, (k \geq 1)$, suy ra $p = 2^{2^k} + 1$.	0,5
	Ta có $2^{p-1} - 1 = \left(2^{2^{2^k-1}} + 1\right) \left(2^{2^{2^k-2}} + 1\right) \dots \left(2^{2^k} + 1\right) \cdot \left(2^{2^{k-1}} + 1\right) \dots (2^2 + 1)(2 + 1)$. (1) Nếu tồn tại $h > k$ để $p \mid (2^{2^h} + 1)$, thì $2^{2^k} \equiv -1 \pmod{p}$, suy ra $2^{2^h} + 1 = \left(2^{2^k}\right)^{2^{h-k}} + 1 \equiv 2 \pmod{p}$.	0,5

Bài	Nội dung	Điểm																																																		
	Điều này vô lý vì p lẻ, suy ra các nhân tử lớn hơn $p = 2^{2^k} + 1$ ở vế phải của (1) đều không chia hết cho p. Do đó, vế phải của (1) không chia hết cho p^2. Mâu thuẫn vì $p^2 \mid (2^{p-1} - 1)$. Suy ra $(p-1)$ phải có ước nguyên tố lẻ.																																																			
	*) Giả sử $(p!+2^n)$ không có ước nguyên tố lẻ, thì $p!+2^n=2^m$ hay $p!=2^n(2^{m-n}-1)$. Do $p > 3$ là số nguyên tố nên $(2, p)=1$. Từ đó suy ra $2^{m-n} \equiv 1 \pmod{p}$. Mặt khác, theo định lý Fermat ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.	1,0																																																		
	Đặt $k = ord_p(2)$ thì $k \mid (p-1)$ và $k \mid (m-n)$. Đặt $p-1=kt, t \in \mathbb{N}^*$, thì $2^{p-1}-1=2^{kt}-1=(2^k-1)\left[(2^k)^{t-1}+(2^k)^{t-2}+...+2^k+1\right]$. Do $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ nên $(2^k)^{t-1}+(2^k)^{t-2}+...+2^k+1 \equiv t \pmod{p}$, Kết hợp với $t \not\equiv 0 \pmod{p}$ thì $(2^k)^{t-1}+(2^k)^{t-2}+...+2^k+1$ không thể chia hết cho p.	0,5																																																		
	Mà $p^2 \mid (2^{p-1}-1)$, nên $p^2 \mid (2^k-1)$. Từ $k \mid (m-n)$ suy ra $p^2 \mid (2^{m-n}-1)$. Khi ấy, $p^2 \mid p!$ (vô lý). Suy ra $(p!+2^n)$ có ước nguyên tố lẻ. Vậy $(p-1)(p!+2^n)$ có ít nhất 3 ước nguyên tố phân biệt.	0,5																																																		
Bài 5 (4,0 điểm)	Một đường tròn đã được chia đều thành 36 cung tròn bởi 36 điểm chia, ta quy ước mỗi cung tròn nhỏ tạo bởi hai điểm chia liền kề nhau có độ dài bằng 1 đơn vị. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 9 điểm từ 36 điểm chia lúc đầu sao cho độ dài cung tròn có hai đầu mút là hai điểm chia bất kì trong số 9 điểm được chọn không bằng 4 đơn vị và cũng không bằng 9 đơn vị?																																																			
	+ Gọi 36 điểm chia theo chiều kim đồng hồ được đánh số lần lượt là $1, 2, 3, \dots, 36$. Ta phân các số (điểm chia) này vào một bảng hình chữ nhật với 4 dòng, 9 cột cuốn quanh một hình trụ (tạm gọi là bảng trụ) như sau: <table><tr><th>Cột 1</th><th>Cột 2</th><th>Cột 3</th><th>Cột 4</th><th>Cột 5</th><th>Cột 6</th><th>Cột 7</th><th>Cột 8</th><th>Cột 9</th><th>Cột 1</th></tr><tr><td>1</td><td>5</td><td>9</td><td>13</td><td>17</td><td>21</td><td>25</td><td>29</td><td>33</td><td>1</td></tr><tr><td>10</td><td>14</td><td>18</td><td>22</td><td>26</td><td>30</td><td>34</td><td>2</td><td>6</td><td>10</td></tr><tr><td>19</td><td>23</td><td>27</td><td>31</td><td>35</td><td>3</td><td>7</td><td>11</td><td>15</td><td>19</td></tr><tr><td>28</td><td>32</td><td>36</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>20</td><td>24</td><td>28</td></tr></table>	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4	Cột 5	Cột 6	Cột 7	Cột 8	Cột 9	Cột 1	1	5	9	13	17	21	25	29	33	1	10	14	18	22	26	30	34	2	6	10	19	23	27	31	35	3	7	11	15	19	28	32	36	4	8	12	16	20	24	28	1,0
Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4	Cột 5	Cột 6	Cột 7	Cột 8	Cột 9	Cột 1																																											
1	5	9	13	17	21	25	29	33	1																																											
10	14	18	22	26	30	34	2	6	10																																											
19	23	27	31	35	3	7	11	15	19																																											
28	32	36	4	8	12	16	20	24	28																																											
	+ Nhận xét: Hai số (điểm chia) liền kề trên cùng một hàng thì tương ứng với một cung có độ dài 4 đơn vị, hai số (điểm chia) trên cùng một cột thì tương ứng với một cung có độ dài 9 đơn vị. Như vậy số cách chọn ra 9 điểm chia thỏa mãn yêu cầu bằng số cách chọn ra 9 số trên bảng trụ sao cho mỗi cột chỉ được lấy ra một số và hai số lấy ra ở hai cột kề nhau của bảng tròn thì không được cùng hàng. Nếu ta coi “hàng” như là “màu”, “cột” như là điểm thì có bài toán tương đương là: Đếm số cách tô màu cho bộ 9 điểm trên vòng tròn, mỗi điểm được tô bởi đúng một trong 4 màu phân biệt cho trước sao cho hai điểm liền kề nhau trên vòng tròn thì được tô bởi hai màu khác nhau.	1,0																																																		

Bài	Nội dung	Điểm
	+ Xét bài toán tổng quát: Trên vòng tròn có n điểm phân biệt $A_1, \dots, A_n$ đã được sắp thứ tự như hình vẽ bên. Mỗi điểm được tô bởi đúng một trong số m màu cố định trước. Tính số cách tô màu $a_n(m)$ cho hệ điểm đó sao cho cứ hai điểm liên kề thì tô bởi hai màu khác nhau.  Ta xây dựng công thức tính $a_n(m)$ bằng phương pháp truy hồi. - Với hai điểm phân biệt trên vòng tròn và m màu thì có $a_2(m) = m(m-1)$ cách tô. - Xét số cách tô màu cho n điểm ($n \geq 3$) trên vòng tròn sao cho A_{i+1} khác màu của A_i với mọi $i = \overline{1, n-1}$. Thấy A_1 có m cách tô màu, A_2 có $m-1$ cách tô màu (do khác màu đã dùng để tô A_1), A_3 có $m-1$ cách tô màu (do khác màu đã dùng để tô A_2), ..., A_n có $m-1$ cách tô màu (do khác màu đã dùng để tô A_{n-1}). Số cách tô như vậy bằng $m(m-1)^{n-1}$. Bây giờ trong các cách tô này ta xét quan hệ màu của A_n với A_1: Nếu màu tô của A_1, A_n trùng nhau thì ta đem gộp hai điểm này làm một thu được cấu hình $(n-1)$ điểm và m màu, đảm bảo hai điểm liên kề trên vòng tròn được tô màu khác nhau. Số cách tô cho cấu hình này là $a_{n-1}(m)$. Nếu màu tô của A_1, A_n khác nhau thì có cấu hình n điểm và m màu, đảm bảo hai điểm liên kề trên vòng tròn được tô màu khác nhau. Số cách tô cho cấu hình này là $a_n(m)$. Như vậy $a_{n-1}(m) + a_n(m) = m(m-1)^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ (*).	1,0
	Từ (*) có $\frac{a_n(m)}{(m-1)^n} - 1 = -\frac{1}{m-1} \left(\frac{a_{n-1}(m)}{(m-1)^{n-1}} - 1 \right)$, suy ra $\frac{a_n(m)}{(m-1)^n} - 1 = \left(-\frac{1}{m-1} \right)^{n-2} \left(\frac{a_2(m)}{(m-1)^2} - 1 \right)$ hay $a_n(m) = (m-1)^n + (-1)^n (m-1)$.	0,5
	+ Vậy số cách chọn ra 9 điểm chia thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng $a_9(4) = (4-1)^9 + (-1)^9(4-1) = 3^9 - 3 = 19680.$	0,5

Chú ý: Mọi cách giải khác của thí sinh mà đúng, tổ giám khảo thống nhất và cho điểm tương ứng.

----- HẾT -----