

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Câu 1 (5,0 điểm) Cho (a_n) là dãy số thực. Sắp xếp các số hạng của dãy (a_n) theo bảng sau:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_3 & & & & & \\ a_4 & a_5 & a_6 & & & & \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & & & \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

Dãy (b_n) được xác định bởi các số hạng $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_4, b_4 = a_7, \dots$ trong đó $b_1 = a_1 = 1$. Giả sử

$$\text{tổng } S_n = \sum_{k=1}^n b_k \text{ thoả mãn } \frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1, \forall n \geq 2.$$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy (b_n) .

b) Biết rằng ở bảng trên bắt đầu từ dòng thứ 3, mỗi dòng (tính từ trái sang phải) đều là một cấp số nhân với công bội dương và công bội ở tất cả các cấp số nhân đó bằng nhau. Tính tổng tất cả các số hạng của dòng thứ 2022 nếu $a_{83} = -\frac{16}{91}$.

Câu 2 (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn O . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , với các đường cao AA', BB', CC' ($A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$) và AE là đường kính của O . Tia EH cắt lại O ở K và I là điểm đối xứng với K qua BC . Ký hiệu (ω) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC . Kẻ đường kính OT của (ω) . Gọi F là điểm đối xứng của T qua BC .

a) Chứng minh rằng các đường thẳng $AK, B'C', BC$ đồng quy và I, H, F thẳng hàng.

b) Gọi J là giao điểm của AE với (ω) và tia TA' cắt lại (ω) ở P . Chứng minh rằng các đường thẳng JP, BC, AT đồng quy.

Câu 3 (4,0 điểm) Xét hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thoả mãn điều kiện

$$f(f(x) - y^2) = f(x^2) + y^2 f(y) - 2f(xy), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{Q}.$$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{Q}$.

b) Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thoả mãn điều kiện trên.

Câu 4 (3,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thoả mãn $2^x + 1 = x^2 y$.

Câu 5 (3,0 điểm) Câu lạc bộ Toán học của một trường THPT có n thành viên. Trong năm 2022 họ đã tổ chức 12 buổi seminar, mỗi buổi có 24 thành viên tham gia. Biết rằng hai thành viên bất kì tham gia chung không quá một buổi.

a) Chứng minh $n > 81$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

.....**HẾT**.....

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.