

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI

.....

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, 5 bài)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG (BẢNG A)

NĂM HỌC 2022-2023

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 08/11/2022

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

Bài 1 (5 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng,

$$\frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab} \leq 1.$$

Bài 2 (3 điểm). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (a, b, c) sao cho với mọi số nguyên dương n không có ước nguyên tố nhỏ hơn 2022 ta luôn có $a^n + b^n + n$ chia hết cho $n + c$.

Bài 3 (3 điểm). Cho hàm số $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ liên tục và thỏa mãn $f(f(x)) = x^4, \forall x \in [0; 1]$. Chứng minh rằng,

$$x^4 < f(x) < x, \forall x \in (0; 1).$$

Bài 4 (5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , P là một điểm thay đổi trên cung nhỏ AC của (O) và K là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC .

- Chứng minh rằng, đường thẳng qua K vuông góc với PA luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.
- Gọi H là hình chiếu của K lên PA . Chứng minh rằng, đường trung trực của đoạn AH luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 5 (4 điểm). Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$. Đặt

$$F = \{X \mid X \subset A \text{ và } S(X) \text{ chia hết cho } 3\}$$

với $S(X)$ là tổng các phần tử của X .

- Tìm số phần tử của tập F có chứa 2022.
- Hãy tính $\sum_{X \in F} S(X)$.

Hết

Thí sinh không sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.