

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN lớp 12 CHUYÊN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm 01 trang, 05 câu)

Câu 1 (4 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{y^2+1}-y)=1 \\ 3\sqrt{x+2y-2}+x\sqrt{x-2y+6}=10 \end{cases}$$

Câu 2 (4 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = a > 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2+u_n}, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a) Chứng minh rằng $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|a - 1|$ với mọi $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ và dãy số (u_n) có giới hạn.
b) Tìm tất các giá trị của a để $u_{2k+1} > u_{2k-1}$ và $u_{2k+2} < u_{2k}$ với mọi $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$.

Câu 3 (4 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$$

- a) Giả sử rằng $f(0) = 0$, chứng minh rằng $f(x)$ là song ánh.
b) Tìm $f(0)$ và tất cả các hàm số thỏa mãn (1).

Câu 4 (6 điểm). Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi S, T lần lượt là trung điểm của AB, AC . Đường thẳng ST cắt BE, CF lần lượt tại M, N .

- a) Chứng minh rằng đường thẳng nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MTH, NSH vuông góc với AH .
b) Gọi P, P' lần lượt là ảnh đối xứng của B, E qua CH . Gọi Q, Q' lần lượt là ảnh đối xứng của C, F qua BH . Chứng minh rằng P, Q, P', Q' đồng viên.
c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ nằm trên đường thẳng *Euler* của tam giác ABC .

Câu 5 (2 điểm).

- a) Cho số nguyên dương n . Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn tính chất: khi lấy ra k phần tử phân biệt bất kì từ tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 2n\}$ (gồm $2n$ số nguyên dương liên tiếp) thì luôn có 2 phần tử được lấy ra mà số này chia hết cho số kia.
b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho ước nguyên tố lớn nhất của $n^4 + 1$ lớn hơn $2n$.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí giám thị số 1: Chữ kí giám thị số 2: