

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai

Bài 5 (6,0 điểm). Với đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$, ký hiệu $f^2(x)$ thay cho $(f(x))^2$. Giả sử $P \in \mathbb{R}[x]$ khác hằng.

a) Chứng minh rằng nếu $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì tồn tại hai đa thức $A, B \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(x) = A^2(x) + B^2(x).$$

b) Chứng minh rằng nếu $P(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ thì tồn tại bốn đa thức $S, T, U, V \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(x) = S^2(x) + T^2(x) + xU^2(x) + xV^2(x).$$

Bài 6 (7,0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến ME, MF đến đường tròn đó (E, F là các tiếp điểm). Tiếp tuyến của (O) tại điểm N thuộc cung lớn $\widehat{EF}$ cắt ME, MF lần lượt tại Q, P . Tia MO cắt các đường thẳng NE, NF lần lượt tại X, Y .

a) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại X, Y của đường tròn (NXY) và đường thẳng đi qua M vuông góc với PQ cùng đi qua một điểm.

b) Đường tròn tâm R đường kính XY cắt PQ tại các điểm S, T . Chứng minh rằng đường tròn (RST) tiếp xúc với hai đường tròn (MPQ) và (O) .

Bài 7 (7,0 điểm). Tìm tất cả các đa thức f hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên tố p ta có

$$f(p) \mid (p-1)! + 1.$$

----- **Hết** -----

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay!
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: