

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}-x-1}\right)$, với $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tính giá trị của biểu thức P với $x = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

Câu II. (4,5 điểm)

1. Giải phương trình: $21(x^3 + x^2 + x) = 4\sqrt{7}(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y-5) - y^2(x+2) = 11(x-y) - 7xy \\ x^2 - 2y + 8 = y\sqrt{2x+4} + (y-2)\sqrt{8-2y} \end{cases}$.

Câu III. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = 12x^2$ và đường thẳng $(d): y = 6mx - m^2 + 4 - \frac{12}{m^2}$, với $m \neq 0$ là tham số. Tìm các giá trị của m để (d) và (P) có các điểm chung lần lượt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Câu IV. (1,5 điểm) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $2^y = x^3 + x^2 + x + 1$.

Câu V. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Đường thẳng AI cắt BC tại M và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K .

1. Chứng minh $KC^2 = KM \cdot KA$.

2. Gọi P là điểm chính giữa của cung BC chứa A trên (O) , D là hình chiếu vuông góc của I trên cạnh BC , G là giao điểm của AD với đường tròn (O) (khác A), H là giao điểm của PG và ID . Chứng minh tứ giác $IBHC$ nội tiếp được.

3. Giả sử N, Q lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBHC$ với các đường thẳng PH, AI . Chứng minh NQ đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC .

4. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBHC$ với các đường thẳng AC, AB và J, L lần lượt là giao điểm của đường tròn (O) với các đường thẳng BI, CI . Chứng minh rằng giao điểm của EL và JF nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBHC$.

Câu VI. (2,0 điểm) Xét a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2ab+b^2} + \frac{1}{2bc+c^2} + \frac{1}{2ca+a^2} \geq 1$.

--- HẾT ---

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....
Người coi thi số 1:.....Người coi thi số 2:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM
(Hướng dẫn chấm gồm 08 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.
- Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.
- Điểm toàn bài không làm tròn.

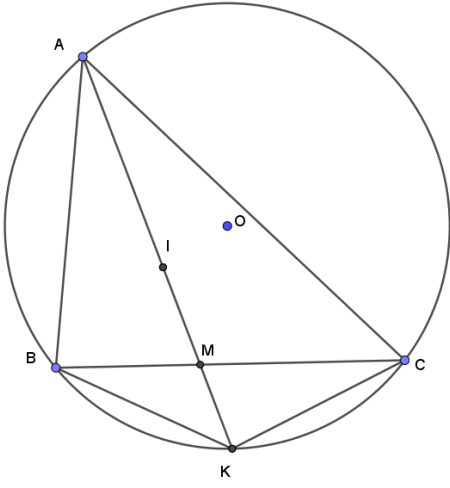
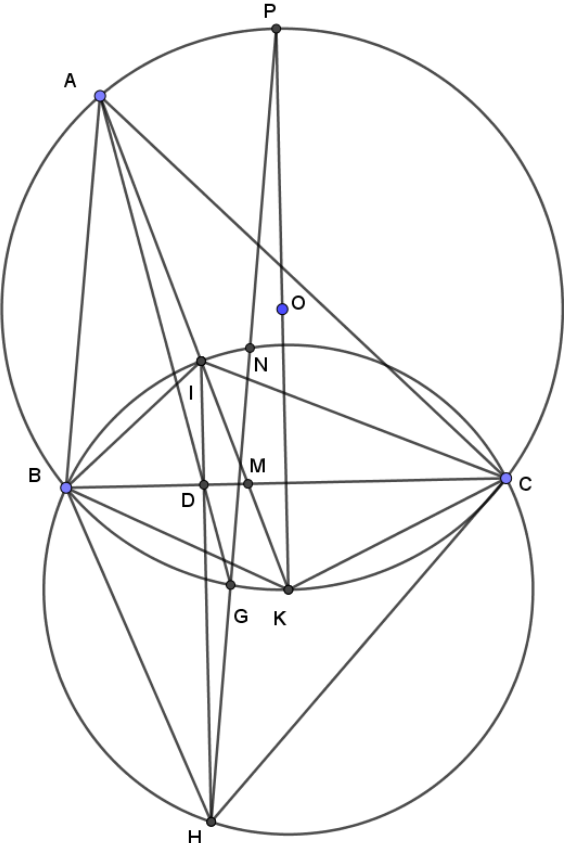
II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

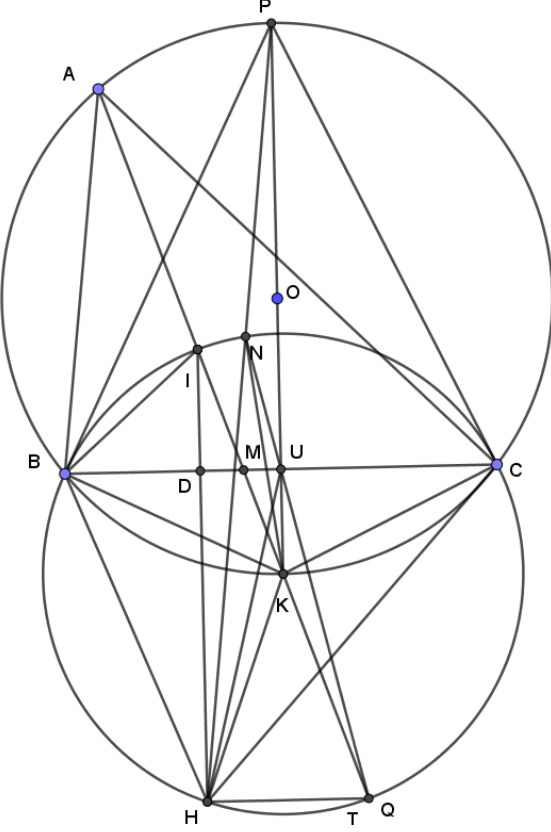
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
I. (3.0 điểm)	Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right)$, với $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. 1. Rút gọn biểu thức P.	1,5
	$P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right)$	0,5
	$= \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{x-1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right)$ $= \left(\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\right)$	0,5
	$= \frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}+1}$ $= \frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$	0,5
	2. Tính giá trị của biểu thức P với $x = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}$.	1,5
	Ta có $x = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$	0,5
	$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{3+\sqrt{5}} + 5 - \sqrt{2} = 5$	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Thay $x=5$ vào $P = \frac{x+1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{6+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = \frac{(6+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{5\sqrt{5}-1}{4}$	0,5
II. (4,0 điểm)	1. Giải phương trình: $21(x^3 + x^2 + x) = 4\sqrt{7}(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}$	2,0
	Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$ Phương trình tương đương: $21x(x^2 + x + 1) = 4\sqrt{7}(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}$ Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$; $x^2 + 1 > 0$; $\sqrt{x^4 + 1} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$	0,25
	Suy ra $x > 0$ Chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được: $21\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = 4\sqrt{7}\left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$ Đặt: $t = x + \frac{1}{x}$, vì $x > 0$ suy ra: $t = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$	0,5
	Phương trình: $21(t+1) = 4\sqrt{7}t\sqrt{t^2-2}$ $4\sqrt{7}t\sqrt{t^2-2} - 28t + 7t - 21 = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{7}t(\sqrt{t^2-2} - \sqrt{7}) + 7(t-3) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{7}t(t^2-9)}{\sqrt{t^2-2}+\sqrt{7}} + 7(t-3) = 0 \Leftrightarrow (t-3)\left[\frac{4\sqrt{7}t(t+3)}{\sqrt{t^2-2}+\sqrt{7}} + 7\right] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ \frac{4\sqrt{7}t(t+3)}{\sqrt{t^2-2}+\sqrt{7}} + 7 = 0(1) \end{cases}$	0,5
	TH1: với $t-3=0 \Leftrightarrow t=3$ (thỏa mãn đk $t \geq 2$) Khi đó $x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ thỏa mãn $x > 0$	0,5
	TH2: $\frac{4\sqrt{7}t(t+3)}{\sqrt{t^2-2}+\sqrt{7}} + 7 = 0(1)$, Do $t \geq 2 \Rightarrow \frac{4\sqrt{7}t(t+3)}{\sqrt{t^2-2}+\sqrt{7}} > 0 \Rightarrow VT(1) > 7 > 0$. Nên pt(1) vô nghiệm. Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	0,25
	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y-5) - y^2(x+2) = 11(x-y) - 7xy(1) \\ x^2 - 2y + 8 = y\sqrt{2x+4} + (y-2)\sqrt{8-2y}(2) \end{cases}$	2,5
	Điều kiện: ĐKXD: $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases}$.	0,25
	+) (1) $\Leftrightarrow (x-y)(xy-5x+2y-11) = 0$ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ xy-5x+2y-11=0 \end{cases}$	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Với $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, thay lại phương trình (2) ta có $x^2 - 2x + 8 = x\sqrt{2x+4} + (x-2)\sqrt{8-2x}$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 16 = 2x\sqrt{2x+4} + 2(x-2)\sqrt{8-2x}$ $\Leftrightarrow (x - \sqrt{2x+4})^2 + (x - 2 - \sqrt{8-2x})^2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{2x+4} = 0 \\ x - 2 - \sqrt{8-2x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+4} = x \\ \sqrt{8-2x} = x - 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \\ x \geq 2 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{5}$	0,5
	+) Với $xy - 5x + 2y - 11 = 0(*)$ Ta có $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow (x+2)(y-4) \leq 0 \Leftrightarrow xy - 4x + 2y - 8 \leq 0$ $(*) \Leftrightarrow xy - 4x + 2y - 8 - (x+3) < 0$ Nên $(*)$ vô nghiệm.	0,5
	Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(1 + \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$.	0,25
III. (2,0 điểm)	Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho Parabol $(P): y = 12x^2$ và đường thẳng $d: y = 6mx - m^2 + 4 - \frac{12}{m^2}$, với $m \neq 0$ là tham số. Tìm các giá trị của m để d và (P) có các điểm chung lần lượt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.	2,0
	Phương trình hoành độ giao điểm là $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0(1)$ $\Delta' = 9m^2 - 12\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right) = -3m^2 + 48 - \frac{144}{m^2} = -\frac{3}{m^2}(m^4 - 16m^2 + 48)$	0,5
	Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{m^2}(m^4 - 16m^2 + 48) \geq 0 \Leftrightarrow m^4 - 16m^2 + 48 \leq 0$ $\Leftrightarrow (m^2 - 4)(m^2 - 12) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 2\sqrt{3} (*)$	0,5
	Với điều kiện $(*)$, pt đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 Theo hệ thức vi - ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6m}{12} = \frac{m}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}}{12} = \frac{m^2 - 4}{12} + \frac{1}{m^2} \end{cases}$ Do đó $A = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ $= \left(\frac{m}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{m^2 - 4}{12} + \frac{1}{m^2}\right)\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^3}{8} - \frac{m^3}{8} + \frac{m}{2} - \frac{3}{2m} = \frac{m^2 - 3}{2m}$	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Ta chứng minh $A \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ bằng cách chứng minh $A - \frac{3\sqrt{3}}{4} \leq 0$, với điều kiện (*). Với điều kiện (*): $ A - \frac{3\sqrt{3}}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 3}{2 m } - \frac{3\sqrt{3}}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2m^2 - 3\sqrt{3} m - 6}{4 m } \leq 0$ $\Leftrightarrow 2m^2 - 3\sqrt{3} m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq m \leq 2\sqrt{3} \quad (*)$ Do có điều kiện (*) nên (*) luôn đúng. Tức là $ A - \frac{3\sqrt{3}}{4} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{4} \leq A \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ Vậy $\min A = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow m = -2\sqrt{3}, \max A = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow m = 2\sqrt{3}$.	0,5
IV. (1,5 điểm)	Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $2^y = x^3 + x^2 + x + 1$.	1,5
	Ta viết lại phương trình thành: $2^y = (x^2 + 1)(x + 1)$ suy ra tồn tại các số $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$ sao cho $\begin{cases} x^2 + 1 = 2^m \\ x + 1 = 2^n \\ m + n = y \end{cases}$	0,5
	+) Thay $x = 2^n - 1$ ta có: $(2^n - 1)^2 + 1 = 2^m \Leftrightarrow 2^{2n} - 2^{n+1} + 2 = 2^m$ $\Leftrightarrow 2(2^{2n-1} - 2^n - 2^{m-1} + 1) = 0 \Leftrightarrow 2^{2n-1} - 2^n - 2^{m-1} + 1 = 0$	0,5
	+) Nếu $m, n \geq 2$ thì $2^{2n-1} - 2^n - 2^{m-1} + 1$ luôn là số lẻ nên khác 0. Xét $n = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = 1, y = 2$ là một nghiệm. Xét $n = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$ là một nghiệm. Vậy phương trình có các nghiệm là: $(x; y) \in \{(0; 0), (1; 2)\}$	0,5
V. (7,0 điểm)	Câu V. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn tâm I , đường thẳng AI cắt BC tại M và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K .	7,0
	1. Chứng minh $KC^2 = KM.KA$	2,0
	Vẽ hình đúng đến ý 1	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
		
	Ta có $BCK = BAK \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} BK \right)$ $CAK = BAK \left(gth \right)$ Từ đó có $BCK = CAK$	0,75
	Xét hai tam giác CAK và MCK có: Góc AKC chung, $BCK = CAK$ nên $\triangle CAK \sim \triangle MCK$	0,5
	Suy ra $\frac{KC}{KA} = \frac{KM}{KC} \Leftrightarrow KC^2 = KM.KA$	0,5
	2. Gọi P là điểm chính giữa của cung BC chứa A của (O), D là hình chiếu vuông góc của I trên cạnh BC, G là giao điểm của AD với đường tròn (O) (khác A), H là giao điểm của PG và ID. Chứng minh tứ giác $IBHC$ nội tiếp được.	2,0
	 Ta có PK là đường kính của (O), suy ra $PK \perp BC$	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Vì $IH \perp BC$; $PK \perp BC \Rightarrow IH \parallel PK \Rightarrow IHP = HPK$ (1) Xét (O) có $GAK = GPK$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác AIGH nội tiếp đường tròn.	0,5
	Chứng minh được $DI.DH = DA.DG$ Tứ giác ABGC nội tiếp (O), chứng minh được $DA.DG = DB.DC$	0,75
	Suy ra $DI.DH = DB.DC$, từ đó chứng minh được tứ giác IBHC nội tiếp đường tròn.	0,5
	3. Giả sử N, Q lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác IBHC với các đường thẳng PH, AI. Chứng minh NQ đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.	2,0
	 Ta có $KIB = IAB + IBA = CBK + IBC = IBK \Rightarrow \Delta KBI$ cân tại K suy ra $KB = KI$ lại có $KB = KC$ nên $KB = KC = KI$, suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác IBHC (gọi là đường tròn (K)) Xét (O) có: PK là đường kính $\Rightarrow PC \perp CK$; $PB \perp BK$, suy ra PB và PC là các tiếp tuyến của (K) Xét (K) có $BC \parallel HQ$ (1) vì cùng vuông góc với HI Gọi U là trung điểm BC, ta có P, O, U, K thẳng hàng. Xét (K) có PB, PC là các tiếp tuyến, PNH là cát tuyến, chứng minh được $PU.PK = PN.PH = PC^2$, suy ra tứ giác NUKH nội tiếp Gọi T là giao điểm thứ hai của NU với (K) Chứng minh được UB là phân giác của NUH $\Rightarrow NUB = \frac{1}{2} NUH = \frac{1}{2} NKH = NTH \Rightarrow BC \parallel HT$ (2) Từ (1); (2) $\Rightarrow T \equiv Q$. Vậy NQ đi qua trung điểm U của BC.	0,5
	4. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác IBHC với các đường thẳng AC, AB và J, L lần lượt là giao điểm của đường tròn	1,0

