

Câu 1 (1,0 điểm). Cho biểu thức $P = \sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}$. Chứng minh rằng với $x \geq 2$, ta luôn có $P \geq 4$.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x - \sqrt{x-2} = 5$

b)
$$\begin{cases} |x+y| + |x-y| = 2x+y+2 \\ |x+y| - |x-y| = 2-y \end{cases}$$

Câu 3 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh:

1) $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{1}{4}(a+b)^2$

$$4(a^2 + b^2)(b^2 - bc + c^2)(3c^2 + 2ac + 3a^2) \geq (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

Câu 4 (2,0 điểm).

1. Tìm tất cả các số nguyên n để n – 1989 và n – 2022 đều là các số chính phương. (Một số được gọi là chính phương nếu nó có thể viết được dưới dạng bình phương của một số nguyên)
2. Biết rằng phương trình $x^2 - ax + b + 2 = 0$ (với a, b là các số nguyên) có hai nghiệm đều là các số nguyên. Chứng minh rằng $2a^2 + b^2$ là hợp số.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC không chứa điểm B, lấy điểm D sao cho $\widehat{DAB} = 90^\circ$ và $\widehat{DCB} < 90^\circ$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của C lên AB, F là hình chiếu vuông góc của A lên BC. Đường thẳng qua E và vuông góc với BD cắt BD, AF lần lượt tại G, H.

- a) Chứng minh rằng: ADGE, ACFE là các tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra $BG \cdot BD = BF \cdot BC$
- b) Chứng minh đường thẳng BH vuông góc với đường thẳng CD.
- c) Đường thẳng AB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD lần nữa tại J. Gọi K và L lần lượt là hình chiếu vuông góc của J lên BD và BC. Chứng minh rằng K, H, L thẳng hàng.

Câu 6 (1,0 điểm). Thầy giáo viết lên bảng các số tự nhiên 1, 2, ..., n theo thứ tự đó từ trái sang phải và yêu cầu An đặt vào trước mỗi số một dấu cộng (+) hoặc dấu trừ (-) để thu được một tổng có kết quả bằng 0.

- a) Khi n = 2021, chứng minh rằng An không thể hoàn thành được yêu cầu.
- b) Hãy xác định tất cả các số tự nhiên n sao cho mỗi n đó, An có thể thực hiện được yêu cầu của thầy giáo đề ra.

----- Hết -----