

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán (chuyên)
Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$

- a) Rút gọn biểu thức P
- b) Tính giá trị của biểu thức P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$
- c) Tìm x để $P > 3$

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình : $(x-9)(x-6)(x-4)(x-1) = -56$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy - 9x + 9 = 0 \\ x^2 + 2y + 2\sqrt{x^2 + 2y + 2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2(3m+1)x + 3(m^2 + 2) = 0(*)$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4$

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình :

$$2x^2 + y^2 - 3xy - x - y - 13 = 0$$

Bài 4. (0,5 điểm) Trên bảng đang có hai số 1 và 2. Thực hiện ghi thêm số lên bảng theo quy tắc sau : Mỗi lần viết lên bảng một số $c = ab + a + b$ với hai số a và b đã có trên bảng. Hỏi cách viết thêm số như trên sau một số lần hữu hạn có thể viết được số 2022 lên bảng không ?

Bài 5. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài đường (O). Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm). Kẻ cát tuyến MNP ($MN < MP$). K là trung điểm của NP

- a) Chứng minh các điểm A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm của đường tròn đó
- b) BA cắt OK tại E và MP cắt AB tại F. Chứng minh KF là phân giác trong của $\angle AKB$ từ đó suy ra $EA.FB = EB.FA$
- c) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm tam giác ANP luôn thuộc một đường tròn cố định

Bài 6. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{15y^2 + 26yz + 8z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{15z^2 + 26zx + 8x^2}}$

ĐÁP ÁN

Bài 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$

d) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1} \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2x} \\ &= (x+\sqrt{x}+1-x-\sqrt{x}-1) \frac{\sqrt{x}+1}{2x} = \frac{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)}{2x} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

e) Tính giá trị của biểu thức P với $x = 3 - 2\sqrt{2}$

$$x = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}-1+1}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}$$

f) Tìm x để $P > 3$

$$P > 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$$

Bài 2. (2,0 điểm)

c) Giải phương trình : $(x-9)(x-6)(x-4)(x-1) = -56$

$$(x-9)(x-6)(x-4)(x-1) = -56 \Leftrightarrow (x-9)(x-1)(x-6)(x-4) = -56$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 10x + 9)(x^2 - 10x + 24) + 56 = 0 (*)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 10x + 9 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow t(t+15) + 56 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 15t + 56 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 + 7 = 0 \\ t = -8 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 2 \\ x = 5 \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{2; 8; 5 \pm 2\sqrt{2}\}$$

d) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy - 9x + 9 = 0 (1) \\ x^2 + 2y + 2\sqrt{x^2 + 2y + 2} - 1 = 0 (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow (x-2y-3)(2x-y-3) = 0 \begin{cases} x-2y-3=0 (3) \\ 2x-y-3=0 (4) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x^2 + 2y + 2}, a \geq 0, \text{ Suy ra } a^2 = x^2 + 2y + 2 \Rightarrow x^2 + 2y = a^2 - 2$$

$$(2) \Rightarrow a^2 - 2 + 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0 (5) \\ a = -3 (ktm) \end{cases}$$

$$Th1: \begin{cases} x = 2y + 3 \\ x^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -2 \\ y = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

$$Th2: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 + 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = -1 \\ x = -5; y = -13 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \left\{ (1; -1); \left(-2; -\frac{5}{2}\right); (-5; -13) \right\}$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Cho phương trình bậc hai: $x^2 - 2(3m+1)x + 3(m^2 + 2) = 0(*)$ với m là tham

số. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4$

Ta có : $\Delta' = (3m+1)^2 - 1.3.(3m^2 + 2) = 6m - 5$

Để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > \frac{5}{6}$

Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6m + 2 \\ x_1x_2 = 9m^2 + 6 \end{cases}$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (6m+2)^2 - 4(9m^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow m = 1(tmdk)$$

Vậy $m = 1$

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình :

$$2x^2 + y^2 - 3xy - x - y - 13 = 0$$

Ta có : $2x^2 + y^2 - 3xy - x - y - 13 = 0 \Leftrightarrow (x - y - 2)(2x - y + 3) = 7$

Ta xét các trường hợp

$$th1: \begin{cases} x - y - 2 = 1 \\ 2x - y + 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$th2: \begin{cases} x - y - 2 = -1 \\ 2x - y + 3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -12 \end{cases}$$

$$th3: \begin{cases} x - y - 2 = 7 \\ 2x - y + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -20 \end{cases}$$

$$th4: \begin{cases} x - y - 2 = -7 \\ 2x - y + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình đã cho là

$$S = \{(1; -2); (-11; -12); (-11; 20); (1; 6)\}$$

Bài 4. (0,5 điểm) Trên bảng đang có hai số 1 và 2. Thực hiện ghi thêm số lên bảng theo quy tắc sau : Mỗi lần viết lên bảng một số $c = ab + a + b$ với hai số a và b đã có trên bảng. Hỏi cách viết thêm số như trên sau một số lần hữu hạn có

thể viết được số 2022 lên bảng không ?

Gọi $c(n)$ số viết lên bảng sau lần thực hiện thứ n

Ta chứng minh $c(n)$ sẽ chia 3 dư 2 với mọi n

Ta có các số viết lên bảng là : 5;11;17;23;.....

Giả sử trên bảng đang có các số đều chia cho 3 dư 2 và số 1

Th1: Ta chọn $a = 1; b = 3k + 2$ thì số viết lên là $ab + a + b = 3k + 2 + 1 + 3k + 2 = 6k + 5$ chia 3 dư 2

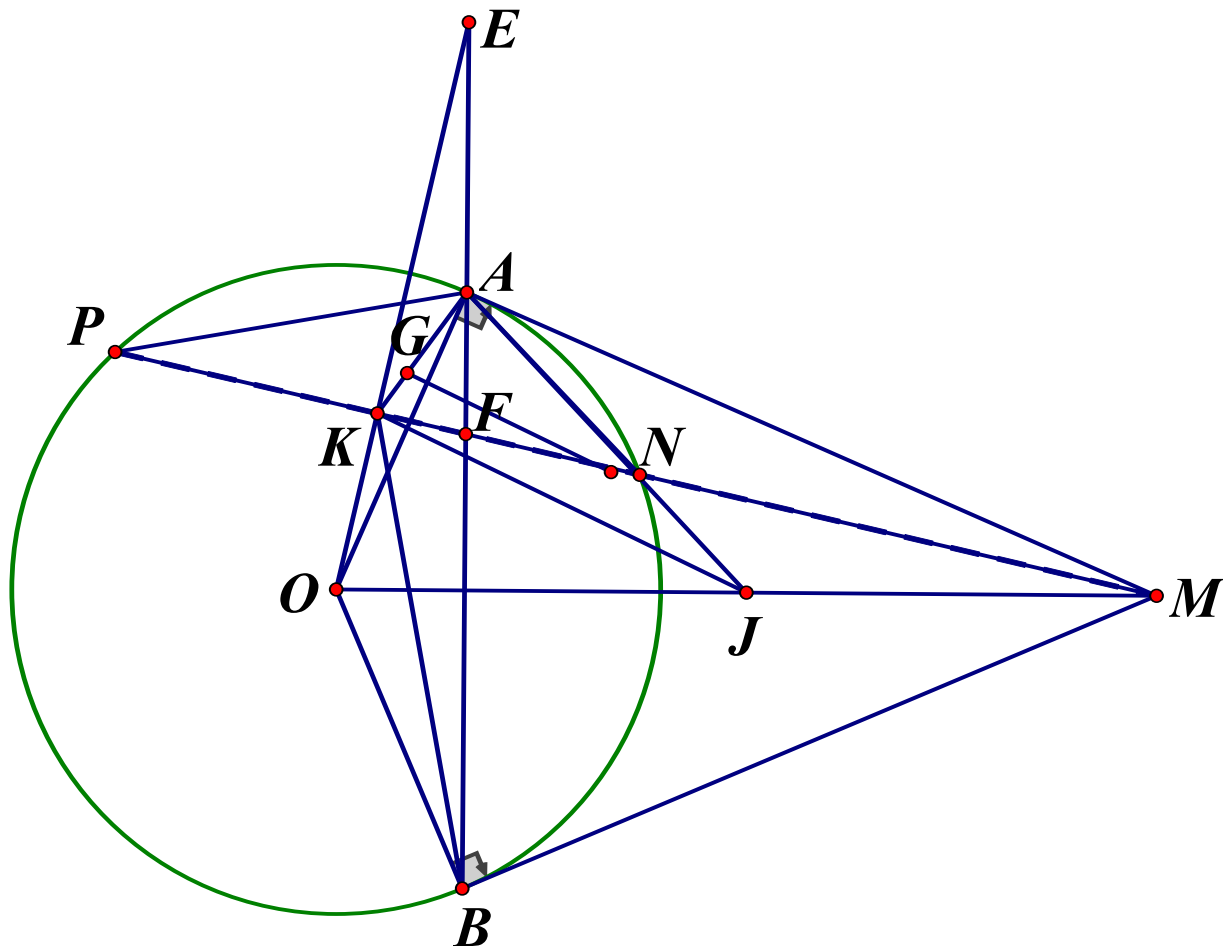
Th2: Ta chọn $a = 3m + 2, b = 3k + 2$ thì số viết lên là :

$ab + a + b = (3m + 2)(3k + 2) + 3m + 2 + 3k + 2 = 3(3mk + 3k + 3m + 2) + 2$ chia 3 dư 2

Vậy các số viết lên bảng luôn chia 3 dư 2 mà $2022 : 3$ nên không thể viết được số 2022 lên bảng

Bài 5.(3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài đường (O) . Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm). Kẻ cát tuyến

MNP ($MN < MP$). K là trung điểm của NP



d) Chứng minh các điểm A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm của đường tròn đó

Ta có $\angle MKO = 90^\circ$ (K là trung điểm NP)

$\angle MAO = 90^\circ$ (AM là tiếp tuyến của (O)), $\angle MBO = 90^\circ$ (BM là tiếp tuyến của (O))

Suy ra A, B, K cùng nhìn MO dưới một góc vuông

Suy ra A, B, K, O, M cùng nằm trên một đường tròn đường kính OM

Suy ra $A, B, K, O \in \left(O; \frac{OM}{2}\right)$ có tâm là trung điểm OM

e) BA cắt OK tại E và MP cắt AB tại F. Chứng minh KF là phân giác trong của $\angle AKB$ từ đó suy ra $EA.FB = EB.FA$

Ta có : $\angle AKM = \angle AOM$ (tứ giác AKOM nội tiếp)

$\angle BKM = \angle BOM$ (tứ giác BOKM nội tiếp)

Và $\angle BOM = \angle AOM$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra $\angle AKM = \angle BKM \Rightarrow KF$ là phân giác trong của $\angle AKB$

Ta có $KE \perp KF$ suy ra KE là phân giác ngoài của $\angle AKB$

Theo tính chất đường phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ta có :

$$\begin{cases} \frac{EA}{EB} = \frac{KA}{KB} \\ \frac{FA}{FB} = \frac{KA}{KB} \end{cases} \Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} \Rightarrow EA.FB = EB.FA$$

f) Chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm tam giác ANP luôn thuộc một đường tròn cố định

Gọi J là trung điểm OM, G là trọng tâm $\triangle ANP$ và T thuộc AJ sao cho $AT = \frac{2}{3}AJ$

Ta có M, O, A cố định nên J, T cố định

$$\text{Ta có } \frac{AG}{AK} = \frac{AT}{AJ} \Rightarrow GT \parallel KJ \Rightarrow \frac{GT}{KJ} = \frac{2}{3}$$

Ta có KJ là đường trung tuyến tam giác vuông OKM

$$\text{Nên } KJ = \frac{1}{2}OM \Rightarrow GT = \frac{1}{3}OM$$

Suy ra G thuộc đường tròn cố định tâm T và bán kính bằng $\frac{1}{3}OM$

Bài 6. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{15y^2 + 26yz + 8z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{15z^2 + 26zx + 8x^2}}$

Ta có :

$$\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2} = \sqrt{(4x + 3y)^2 - (x - y)^2} \leq \sqrt{(4x + 3y)^2} = 4x + 3y$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{15x^2 + 26xy + 8y^2}} \geq \frac{x^2}{4x + 3y}. \text{ Chứng minh tương tự, ta có :}$$

$$\frac{y^2}{\sqrt{15y^2 + 26yz + 8z^2}} \geq \frac{y^2}{4y + 3z}; \frac{z^2}{\sqrt{15z^2 + 26zx + 8x^2}} \geq \frac{z^2}{4z + 3x}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x^2}{4x + 3y} + \frac{y^2}{4y + 3z} + \frac{z^2}{4z + 3x}. \text{ Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có :}$$

$$\frac{x^2}{4x + 3y} + \frac{4x + 3y}{49} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4x + 3y} \cdot \frac{4x + 3y}{49}} = \frac{2x}{7}$$

Tương tự :

$$\frac{y^2}{4y + 3z} + \frac{4y + 3z}{49} \geq \frac{2y}{7}; \frac{z^2}{4z + 3x} + \frac{4z + 3x}{49} \geq \frac{2z}{7}. \text{ Suy ra :}$$

$$P + \frac{x + y + z}{7} \geq \frac{2(x + y + z)}{7} \Leftrightarrow P \geq \frac{x + y + z}{7} = \frac{7}{3}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$