

Bài 1. a) Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + c \geq b$ và $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{a - b + c}$
Tính giá trị của biểu thức $P = a^{2021} - b^{2021} + c^{2021} - (a - b + c)^{2021}$

b) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn
$$\begin{cases} x = y^2z \\ y = z^2x \\ z = x^2y \end{cases}$$

Bài 2. a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + 5x^2 + x + 2 = y^2$

b) Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 2025 nguyên tố cùng nhau với 2021?

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{2a + b + c} + \frac{b}{a + 2b + c} + \frac{c}{a + b + 2c} \leq \frac{3}{4}$$

Bài 4. Cho một hình chữ nhật và 17 đường thẳng phân biệt thỏa mãn: Mỗi đường thẳng chia hình chữ nhật đã cho thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{3}{4}$. Chứng minh rằng trong 17 đường thẳng đã cho tồn tại ít nhất 5 đường thẳng đồng quy tại một điểm.

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của ba tia AI, BI, CI với đường tròn (O) (D khác A, E khác B, F khác C). Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AD và EF , gọi N là giao điểm của hai đường thẳng OD và EF .

a) Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác DEF .

b) Chứng minh rằng
$$\frac{ME}{MF} \cdot \frac{NE}{NF} = \left(\frac{DE}{DF} \right)^2$$