

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
CHUYÊN TOÁN TỈNH ĐIỆN BIÊN NĂM HỌC 2024-2025
ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}$; $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ ($x > 0, x \neq 1$)

a. Rút gọn P .

b. Cho $M = \frac{P}{Q}$. Tìm x để M là số nguyên.

Câu 2

a. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - x} = 4 + 3x - 3x^2$.

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + 3x + 5 = 4xy \\ y^2 + 2y - 8 = 7x \end{cases}$$
.

c. Cho số thực a thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức $N = a^2 - a + \frac{2}{a^2 + 1} + 2023$.

Câu 3. Cho các hàm số $y = -x^2$ (P) và $y = (2m-2)x - 2m - 5$ (d). Biết $(d) \cap (P)$ tại A, B sao cho $M(-1; -11)$ là trung điểm của AB . Gọi H, K tương ứng là hình chiếu của A, B trên trục hoành. Tính độ dài HK .

Câu 4. Cho đường tròn (O) . B, C là các điểm cố định trên (O) , $BC \neq 2R$. A là một điểm thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Kẻ các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC . AA' là đường kính của (O) .

a. Chứng minh $\angle BAD = \angle CAA'$

b. M là điểm đối xứng với A qua BC , N là điểm đối xứng với B qua AC .

1. Chứng minh rằng $CM.CE = CN.CD$

2. Giả sử M, C, N thẳng hàng, $R = 8cm$. Tính AB .

c. I, J lần lượt là trung điểm của BC, EF . AI cắt EF tại K , H là hình chiếu của K lên BC . Chứng minh A, J, H thẳng hàng.

Câu 5. Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn: $|a-b| + |b-c| + |c-d| + |d-a| = a^{2024} + 2025$.

Chứng minh rằng $a^{12} - 1$ chia hết cho 16.

Câu 6. Một hội nghị tham dự có n người ($n < 75$), mỗi người được xếp vào m hàng. Tổng số người và số hàng cộng với tích, thương, hiệu của số người và số hàng bằng 847. Tính số người tham dự hội nghị và số người của mỗi hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Lời giải được thực hiện bởi thầy Trần Đại Lộ, Trần Trường Sinh, GV toán trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Điện Biên

Câu 1. Cho $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}$; $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ ($x > 0, x \neq 1$)

a. Rút gọn P .

b. Cho $M = \frac{P}{Q}$. Tìm x để M là số nguyên.

Lời giải

a. $P = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)^2}$

b. $M = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$. Dễ thấy $0 < M < 3$ nên nếu M là số nguyên thì $M = 1$ hoặc $M = 2$

Trường hợp 1: $M = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Trường hợp 2: $M = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Câu 2.

a. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-x} = 4+3x-3x^2$.

Lời giải

Phương trình tương đương với: $3(x^2-x) + \sqrt{x^2-x} - 4 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2-x}$ ($t \geq 0$) ta được phương trình: $3t^2 + t - 4 = 0$.

Giải phương trình này ta được $t_1 = 1$ (thỏa mãn), $t_2 = -\frac{4}{3}$ (loại).

Với $t_1 = 1$ thì $\sqrt{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}); \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \right\}$.

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + 3x + 5 = 4xy \\ y^2 + 2y - 8 = 7x \end{cases}$$

Lời giải

Cộng hai phương trình tương ứng vế với vế ta được:

$$(2x-y)^2 - 2(2x-y) - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y = -1 \\ 2x-y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y-1 \\ 2x = y+3 \end{cases}$$

Với $2x = y-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được:

$$2(y^2 + 2y - 8) = 7(y-1) \quad (1)$$

Giải phương trình này ta được $y_1 = 3, y_2 = -\frac{3}{2}$, tương ứng ta được $x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{4}$.

Với $2x = y+3$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được:

$$2(y^2 + 2y - 8) = 7(y+3) \quad (2)$$

Giải phương trình này ta được $y_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{305}}{4}$, tương ứng ta được $x_{3,4} = \frac{15 \pm \sqrt{305}}{8}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có tập các nghiệm $(x; y)$ là

$$S = \left\{ (1;3), \left(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{15+\sqrt{305}}{8}; \frac{3+\sqrt{305}}{4}\right), \left(\frac{15-\sqrt{305}}{8}; \frac{3-\sqrt{305}}{4}\right) \right\}.$$

c. Cho số thực a thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức $N = a^2 - a + \frac{2}{a^2 + 1} + 2023$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = a^2 - a + \frac{2}{a^2 + 1} - 1 = a(a-1) - \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = \frac{a-1}{a^2 + 1} \cdot [a(a^2 + 1) - (a+1)]$$

$$\Rightarrow M = \frac{(a-1)(a^3 - 1)}{a^2 + 1} = \frac{(a-1)^2(a^2 + a + 1)}{a^2 + 1} \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Do đó $N = M + 2024 \geq 2024$.

Từ đó $\min N = 2024 \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 3. Cho các hàm số $y = -x^2$ (P) và $y = (2m-2)x - 2m - 5$ (d). Biết $(d) \cap (P)$ tại A, B sao cho $M(-1; -11)$ là trung điểm của AB . Gọi H, K tương ứng là hình chiếu của A, B trên trục hoành. Tính độ dài HK .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $(d) \cap (P)$ là:

$$x^2 + 2(m-1)x - 2m - 5 = 0 \quad (1)$$

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 + 2m + 5 = m^2 + 6 > 0, \forall m$ nên luôn có $(d) \cap (P)$ tại A, B phân biệt.

$$\text{Khi đó: } x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \Leftrightarrow -1 = 1 - m \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn } y_M = -11).$$

Với $m = 2$ thì pt (1) trở thành: $x^2 + 2x - 9 = 0 \quad (2)$

$$\text{Ta có } HK = |x_A - x_B| = 2\sqrt{10}.$$

Câu 4. Cho đường tròn (O) . B, C là các điểm cố định trên (O) , $BC \neq 2R$. A là một điểm thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Kẻ các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC . AA' là đường kính của (O) .

a. Chứng minh $\angle BAD = \angle CAA'$

b. M là điểm đối xứng với A qua BC , N là điểm đối xứng với B qua AC .

1. Chứng minh rằng $CM \cdot CE = CN \cdot CD$

2. Giả sử M, C, N thẳng hàng, $R = 8\text{cm}$. Tính AB .

c. I, J lần lượt là trung điểm của BC, EF . AI cắt EF tại K , H là hình chiếu của K lên BC . Chứng minh A, J, H thẳng hàng.

Lời giải

+, Ta có phương trình sau: $m + n + mn + n - m + \frac{n}{m} = 847$ tương đương $2n + mn + \frac{n}{m} = 847$

+, Do $2n + mn$ là số tự nhiên nên $\frac{n}{m}$ cũng là số tự nhiên suy ra $n = km (k \in \mathbb{N})$, thay vào phương trình ta

có: $2km + km^2 + k = 847 \Leftrightarrow k(m+1)^2 = 847 = 7 \cdot 11^2$ nên $m+1 = 11 \Leftrightarrow m = 10$ và $k = 7$

Vậy tổng có 70 người và mỗi hàng 7 người.