

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LẠNG SƠN**

**ĐỀ CHÍNH THỨC
Mã đề 450**

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2024 – 2025**

**Môn thi: Toán (dành cho lớp chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)**

Câu 1: Trắc nghiệm

1. Biết $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$. Khi đó giá trị của biểu thức $x_0^2 - 2y_0^2$ là

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 6

2. Nghiệm lớn nhất của phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ là

- A. $\sqrt{2}$ B. 3 C. 1 D. $\sqrt{3}$

3. Cho đường tròn có bán kính bằng 5cm, chu vi của đường tròn đó là

- A. 5π cm B. 10 cm C. 5 cm D. 10π cm

4. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

- A. 6 cm B. 10 cm C. 5 cm D. 8 cm

5. Biểu thức $P = \sqrt{2x - 4}$ có nghĩa khi

- A. $x \geq -2$ B. $x \geq 2$ C. $x \leq 2$ D. $x \leq -2$

6. Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d): $y = 4x + m$ cắt parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt là

- A. $m < 2$ B. $m \geq -2$ C. $m > -2$ D. $m \leq 2$

7. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m - 1)x + 6$ nghịch biến trên R là

- A. $m \geq -1$ B. $m < 1$ C. $m > 0$ D. $m > 1$

8. Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn, giả sử số đo góc $BAD = 40^\circ$, thì số đo góc BCD là

- A. 140° B. 60° C. 100° D. 40°

Câu 2:

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} + \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ với $x > 0, x \neq 1$

1) Rút gọn P

2) Tìm các số nguyên x để P có giá trị nguyên

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy + x - 2y = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 3x - 5y - 1 = 0 \end{cases}$

Câu 3: Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến AB với B là tiếp điểm. Một đường thẳng d đi qua A và cắt (O) tại M, N sao cho: O và B nằm khác phía so

với d, điểm M ở giữa A và N. Kẻ $BH \perp AO$ (H thuộc AO), gọi K là trung điểm của MN.

a) Chứng minh rằng $AB^2 = AM \cdot AN, KAO = OBK$

b) Chứng minh rằng tứ giác MHON nội tiếp và HB là phân giác của MHN

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN cắt đường thẳng AB tại P, Q và cắt đường thẳng HB tại D (D khác H). Gọi R là trung điểm của BD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR và (O) tiếp xúc với nhau.

Câu 4: Cho các số thực a, b, c. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a) $\frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq 8$

b) $a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \leq (a+b+c)^3$

c) $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 7bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9ab}} \geq 1$

Câu 5:

a) Giải phương trình sau đây trên tập số nguyên: $2x^2y + 8x^2 + y = 11$

b) Định lý Wilson phát biểu ở dạng chia hết như sau: “Cho số nguyên dương $n \geq 2$, khi đó n là số nguyên tố khi và chỉ khi $(n-1)! + 1$ chia hết cho n”; với kí hiệu $n! = 1.2.3 \dots n$ là tích của n số nguyên liên tiếp từ 1 đến n và $0! = 1$.

1) Sử dụng định lý Wilson chứng minh rằng: “n là số nguyên tố thì $(n-2)! - 1$ chia hết cho n”.

2) Hãy chứng minh chiều ngược của định lý Wilson: “Số nguyên dương $n \geq 2$ thỏa mãn $(n-1)! + 1$ chia hết cho n thì n là số nguyên tố”.

c) Viết các số nguyên dương liên tiếp 1, 2, ..., 2022 trên bảng; gọi m, n là ước nguyên tố của 2025, người ta thực hiện mỗi bước như sau: Hai số bất kì a, b ở trên bảng sẽ bị xóa đi và viết thay thế lên bảng số $|ma - nb|$ hoặc $|ma + nb|$. Thực hiện liên tiếp các bước như trên, hỏi rằng cuối cùng trên bảng có thể còn lại duy nhất số 2024 hay không?

ĐÁP ÁN

Câu 2:

a)

$$1. \quad P = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} + \frac{2-\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$P = \left(\frac{x+\sqrt{x}-2+2+\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{2}{x-1}$$

2. Do x nguyên nên để P nguyên thì $2 \vdots (x-1)$
 $\Rightarrow x-1 \in \{-2; 2; -1; 1\}$
 $\Rightarrow x \in \{-1; 3; 0; 2\}$, kết hợp với điều kiện xác định
 $\Rightarrow x \in \{3; 2\}$

b)
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy + x - 2y = 0(1) \\ x^2 + 2y^2 - 3x - 5y - 1 = 0(2) \end{cases}$$

Xét phương trình $2x^2 + 2y^2 - 5xy + x - 2y = 0(1)$

Ta có: $\Delta_x = (5y-1)^2 - 8(2y^2 - 2y) = 9y^2 + 6y + 1 = (3y+1)^2$

Khi đó pt (1) có 2 nghiệm $\begin{cases} x = 2y \\ x = \frac{y-1}{2} \end{cases}$

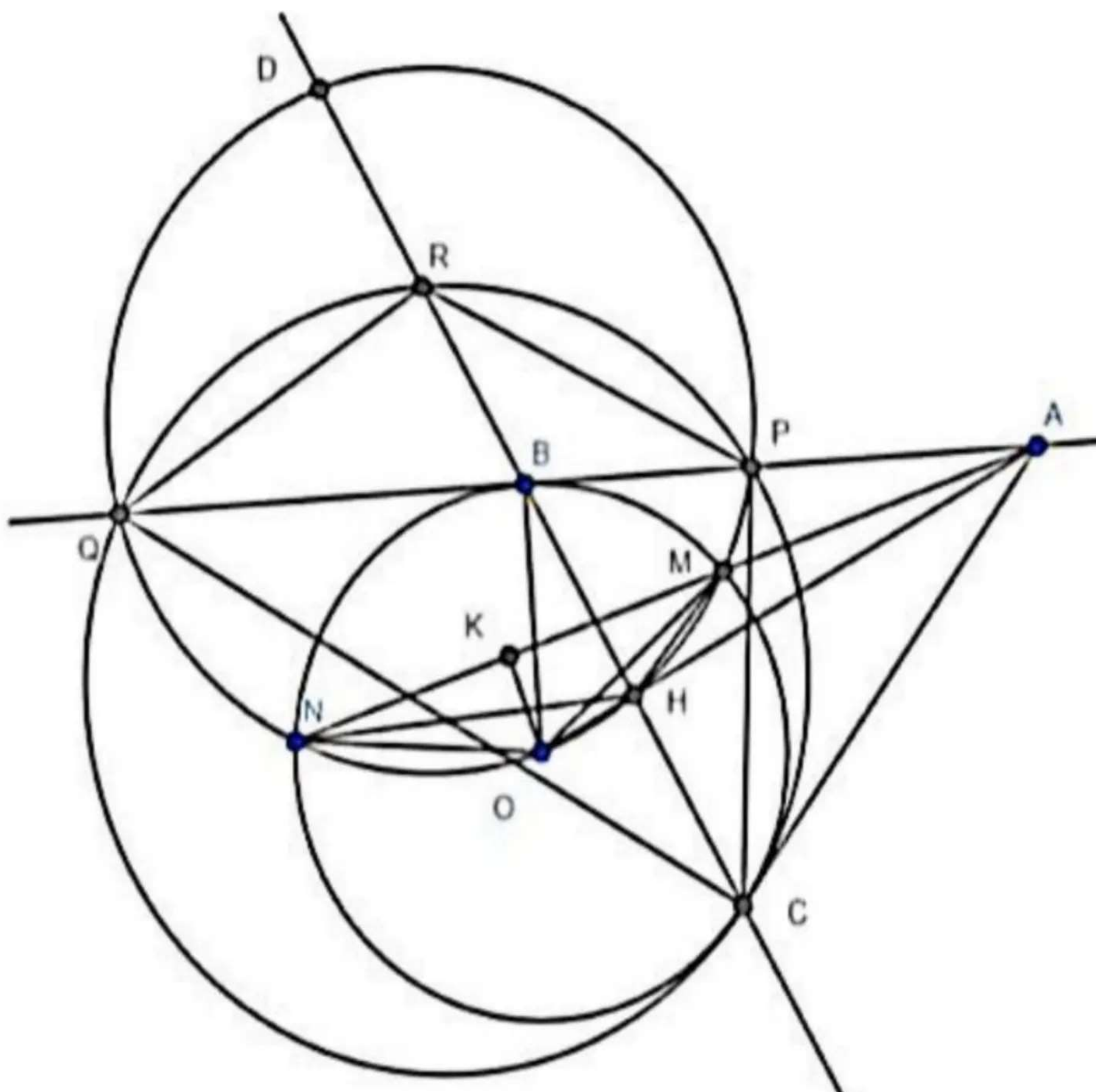
Với $x = 2y$ thay vào (2) ta được

$$6y^2 - 11y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{11 + \sqrt{145}}{12} \Rightarrow x = \frac{11 + \sqrt{145}}{6} \\ y = \frac{11 - \sqrt{145}}{12} \Rightarrow x = \frac{11 - \sqrt{145}}{6} \end{cases}$$

Với $x = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y = 2x+1$, thay vào (2) ta được

$$9x^2 - 5x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -\frac{4}{9} \Rightarrow y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Câu 3:



a) Có AB là tiếp tuyến, AMN là một cát tuyến của (O)
 nên $AB^2 = AM \cdot AN$ (tính chất phương tích)
 (Có thể chứng minh tam giác AMB đồng dạng với tam giác ABN)
 K là trung điểm dây cung MN

$$\Rightarrow \angle OKA = 90^\circ \Rightarrow \angle OKA = \angle OBA = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác OKBA nội tiếp

$$\Rightarrow \angle KBO = \angle KAO$$

b) Tam giác OBA vuông tại B, BH là đường cao

$$\Rightarrow AB^2 = AH \cdot AO$$

$$\text{Mặt khác } AB^2 = AM \cdot AN \Rightarrow AM \cdot AN = AH \cdot AO$$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNOH nội tiếp (tính chất phương tích)

$$\text{Tứ giác MNOH nội tiếp} \Rightarrow \begin{cases} \angle NMO = \angle NHO \\ \angle ONM = \angle MHA \end{cases}$$

Mà $\angle NMO = \angle ONM$ (tam giác OMN cân tại O)

$$\Rightarrow \angle NHO = \angle MHA \text{ kết hợp với } \angle BHA = \angle BHO = 90^\circ$$

$\Rightarrow BHM = BHN$ hay HB là phân giác của MHN

c) Gọi AC là tiếp tuyến thứ 2 dựng từ A đến (O)

Tứ giác OHMN nội tiếp, kết hợp với giả thiết điểm D

$\Rightarrow$ Các điểm D, Q, N, O, H, M, P đồng viên (1)

$\Rightarrow$ DQHP nội tiếp

$\Rightarrow BH.BD = BQ.BP$

$\Rightarrow BH.2BR = BQ.BP$

$\Rightarrow BC.BR = BQ.BP$ (vì $BH \perp OA \Rightarrow BC \perp OA \Rightarrow BC = 2BH$)

Suy ra tứ giác RQCP nội tiếp

Hay C nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR (*)

Từ (1) suy ra tứ giác PQOH nội tiếp

$\Rightarrow AP.AQ = AH.AO = AB^2$ (theo ý b)

Mà $AB = AC \Rightarrow AP.AQ = AC^2$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp PQR

Mà AC cũng là tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow$ Hai đường tròn (PQR) và (O) tiếp xúc nhau với tiếp tuyến chung AC (đpcm)

Câu 4:

a) Áp dụng Cauchy được

$$\frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ca}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8$$

b) Có $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

Sử dụng BĐT $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ta có đpcm

$$\begin{aligned} \text{c) Có } & \frac{a}{\sqrt{a^2+7bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+9ab}} \\ &= \frac{a^2}{a\sqrt{a^2+7bc}} + \frac{b^2}{b\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c^2}{c\sqrt{c^2+9ab}} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt{a^3+7abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{c}\sqrt{c^3+9abc}} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a}\sqrt{a^3+7abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+9abc}} \end{aligned}$$

$$\text{Có: } \left(\sqrt{a}\sqrt{a^3+7abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+9abc} \right)^2 \leq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)$$

(Bunhiacopxki)

Sử dụng kết quả ý b ta được

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc) \leq (a+b+c)(a+b+c)^3 = (a+b+c)^4$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a}\sqrt{a^3+7abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+9abc} \right)^2 \leq (a+b+c)^4$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{a^3+7abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+9abc} \leq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a}\sqrt{a^3+7abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+9abc}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1$$

(Không xảy ra đẳng thức)

Câu 5:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2x^2y + 8x^2 + y = 11 \\ & \Rightarrow 2x^2(y+4) + y + 4 = 15 \\ & \Rightarrow (2x^2+1)(y+4) = 15 \end{aligned}$$

Vì x, y nguyên nên $2x^2+1$; $y+4$ là ước của 15, chú ý $2x^2+1 > 0$ từ đó ta được

$2x^2+1$	15	1	3	5
$y+4$	1	15	5	3
x	Loại	0	1; -1	Loại
y	Loại	11	1	Loại

Vậy phương trình có các nghiệm $(x; y) \in \{(0; 11); (1; 1); (-1; 1)\}$

b)

$$1. \text{ Xét } (n-1)! + 1 = (n-1)(n-2)! - (n-1) + n = (n-1)[(n-2)! - 1] + n$$

Theo định lý Wilson, có $(n-1)! + 1 : n, n : n \Rightarrow (n-1)[(n-2)! - 1] : n$

Mà $(n-1; n) = 1$ với mọi n nên $(n-2)! - 1 : n$ (đpcm)

$$2. \text{ Do } (n-1)! + 1 : n \Rightarrow (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$$

Giả sử n không phải số nguyên tố $\Rightarrow n \geq 4$

Với $n = 4$ thì $(n-1)! = 3! \equiv 2 \pmod{4} (l)$

Với $n > 4$, do n không nguyên tố, đặt $n = pq$ với $1 < p \leq q < n$

TH1: $p < q \Rightarrow p, q \in \{2; 3; \dots; n-1\}$ khi đó $\Rightarrow (n-1)! : pq \Rightarrow (n-1)! : n$ (mâu thuẫn)

$$\text{TH2: } p = q \Rightarrow n = p^2$$

Khi đó $(n-1)! : p$ mà $p > 1$

$$\Rightarrow (n-1)! + 1 \nmid p \Rightarrow (n-1)! + 1 \nmid p^2 = n \text{ (mâu thuẫn)}$$

Từ đó ta có điều giả sử là sai

Vậy ta có đpcm.

c) Vì ban đầu có 2022 số nên sẽ có 1011 số lẻ

Gọi số các số lẻ còn lại trên bảng sau lần thay thế thứ k là n_k (ví dụ khi chưa thay thế lần nào thì $n_k = n_0 = 1011$)

Ta có: 2025 là số lẻ $\Rightarrow m$; n là các số lẻ, khi đó ta có các nhận xét sau

+ Nếu a, b có một số chẵn, 1 số lẻ thì $ma - nb$ và $ma + nb$ đều là các số lẻ

$\Rightarrow$ nếu thực hiện thay thế thì số các số lẻ không đổi

+ Nếu a, b là 2 số chẵn thì $ma - nb$ và $ma + nb$ cùng chẵn

$\Rightarrow$ nếu thực hiện thay thế thì số các số lẻ không đổi
+ Nếu a, b là 2 số lẻ thì $ma - nb$ và $ma + nb$ cùng chẵn

$\Rightarrow$ nếu thực hiện thay thế thì số các số lẻ giảm đi 2 số

Như vậy sau mỗi lần xóa thì số các số lẻ hoặc không đổi, hoặc giảm đi 2 số. Nghĩa là sau k lần thay thế thì tất cả các n_k đều chung tính chất chẵn lẻ mà $n_0 = 1011$ là lẻ nên n_k với mọi k .

$\Rightarrow n_k$ không thể bằng 0

Do vậy nếu xóa đến khi còn lại số cuối cùng thì số đó bắt buộc phải là số lẻ
Vậy số cuối cùng trên bảng không thể bằng 2024.