

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS, NĂM HỌC 2020 - 2021**

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 30/3/2021

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1.(5,00 điểm)

a) Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}} = 1$.

b) Biết đa thức $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ chia hết cho đa thức $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$. Tính giá trị biểu thức $(p+q)r$.

Câu 2.(3,50 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5 \\ 2x+y-xy + \frac{10}{xy} = 4. \end{cases}$$

Câu 3.(2,50 điểm) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 5y^2 = 13$.

Câu 4.(3,00 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau ở D . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của DA với (O) và DA với BC ; H là giao điểm của OD với BC .

a) Chứng minh tam giác OAH đồng dạng với tam giác ODA .

b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt (O) tại K (khác A). Chứng minh rằng E, H, K thẳng hàng.

Câu 5.(3,00 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = x^3 + y^3 \text{ với } x \neq 0, y \neq 0, \frac{1}{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}.$$

Câu 6.(3,00 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, có H là trực tâm, (I) là đường tròn nội tiếp. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB . Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên EF .

a) Chứng minh rằng $\widehat{FKB} = \widehat{EKC}$.

b) Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của HB, HC với EF .

Chứng minh đẳng thức: $EK.FP = FK.EQ$.

c) Chứng minh rằng KD là phân giác của $\widehat{HKI}$.

-----Hết-----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....;Số báo danh:.....

Chữ kí giám thị 1:.....;Chữ kí giám thị 2:.....

2. Đáp án và thang điểm

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1		5,00 đ
	a) Chứng minh rằng: $A = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}} = 1$.	2,50 đ
	Ta thấy: $A^3 = 10 - 9\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right) = 10 - 9A$	1,00 đ
	$\Leftrightarrow (A-1)(A^2 + A + 10) = 0$.	0,50 đ
	Vì $A^2 + A + 10 = \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0$ nên suy ra $A - 1 = 0 \Leftrightarrow A = 1$.	1,00 đ
	b) Biết đa thức $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ chia hết cho đa thức $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$. Tính giá trị biểu thức $Q = (p+q)r$.	2,50 đ
	Giả sử $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r = (x+a)(x^3 + 3x^2 + 9x + 3)$	0,50 đ
	$= x^4 + (a+3)x^3 + (3a+9)x^2 + (9a+3)x + 3a$.	0,50 đ
	Đồng nhất các hệ số cùng bậc hai vế, ta được: $\begin{cases} 4 = a+3 \\ 6p = 3a+9 \\ 4q = 9a+3 \\ r = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ p = 2 \\ q = 3 \\ r = 3. \end{cases}$	1,00 đ
	Suy ra $(p+q)r = 15$.	0,50 đ
2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5 \\ 2x+y-xy + \frac{10}{xy} = 4. \end{cases}$	3,50 đ
	Điều kiện $xy \neq 0, 2x+y-xy \neq 0$.	0,25 đ
	Đặt $u = xy, v = 2x+y-xy (u, v \neq 0)$, hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} \frac{u}{2} + \frac{5}{v} = 5 \quad (1) \\ v + \frac{10}{u} = 4 \quad (2). \end{cases}$	0,50 đ
	Từ (2) $\Rightarrow v = 4 - \frac{10}{u}$ hay $v = \frac{4u-10}{u}$. Thay vào (1) ta được	0,50 đ
	$\frac{u}{2} + \frac{5u}{4u-10} = 5 \Rightarrow u^2 - 10u + 25 = 0 \Leftrightarrow (u-5)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 5 \Rightarrow v = 2$.	1,00 đ
	Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} xy = 5 \\ 2x+y-xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 5 \\ 2x+y = 7 \end{cases}$	0,50 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x(7-2x) = 5 \\ y = 7-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x + 5 = 0 \\ y = 7-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ x = \frac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases}$	0,50 đ

	Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1;5), \left(\frac{5}{2};2\right)$.	0,25 đ
3	Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 5y^2 = 13$ (*)	2,50 đ
	Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2(x^2 + 1) = 5(3 - y^2)$.	0,50 đ
	Do $(2,5) = 1$ nên $(x^2 + 1):5$ và $(3 - y^2):2$.	0,50 đ
	Đặt $x^2 + 1 = 5k, 3 - y^2 = 2l$, ta có: $10k = 10l \Rightarrow k = l (k, l \in \mathbb{Z})$.	0,50 đ
	Do đó: $\begin{cases} x^2 = 5k - 1 \geq 0 \\ y^2 = 3 - 2l \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq \frac{1}{5} \\ l \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow k = l = 1.$	0,50 đ
	Vậy $x = \pm 2, y = \pm 1$.	0,50 đ
	Phương trình có các nghiệm nguyên: $(-2; -1), (-2; 1), (2; -1)$ và $(2; 1)$.	0,50 đ
4		3,00 đ
	a) Chứng minh $\triangle OAH \sim \triangle ODA$	1,00 đ
	Theo tính chất tiếp tuyến thì $BC \perp OD$.	0,25 đ
	Áp dụng HTL vào tam giác vuông OCD , với CH là đường cao ta có: $OC^2 = OH \cdot OD \Leftrightarrow OA^2 = OH \cdot OD$ $\Rightarrow \frac{OA}{OH} = \frac{OD}{OA}$	0,50 đ
	$\Rightarrow \triangle OAH \sim \triangle ODA$.	0,25 đ
	b) Chứng minh rằng E, H, K thẳng hàng	2,00 đ
	Từ câu a) ta có $\triangle OAH \sim \triangle ODA$ $\Rightarrow \widehat{OHA} = \widehat{OAD} = \widehat{OEA}$ (1) $\Rightarrow OAEH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EHD} = \widehat{EAO} = \widehat{OAD}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{EHD} = \widehat{OHA}$ (3).	1,00 đ
	Dễ thấy $\triangle ABH = \triangle KCH$ (c.g.c) $\Rightarrow HA = HK$ hay AKH cân tại H (4). Vì $OH \perp BC, AK \parallel BC \Rightarrow OH \perp AK$ (5). Từ (4) và (5) suy ra OH là phân giác $\widehat{AHK}$ hay $\widehat{OHA} = \widehat{OHK}$ (6).	0,50 đ
	Kết hợp (3) và (6) suy ra $\widehat{OHK} = \widehat{EHD}$; Suy ra $\widehat{EHO} + \widehat{OHK} = \widehat{EHO} + \widehat{EHD} = 180^\circ$, hay 3 điểm E, H, K thẳng hàng.	0,50 đ
5	Tìm GTLN của biểu thức: $P = x^3 + y^3$ với $x \neq 0, y \neq 0, \frac{1}{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}$.	3,00 đ
	Giả thiết: $\frac{1}{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x + y = x^2 - xy + y^2$ (do $x \neq 0, y \neq 0$).	0,50 đ
	Do đó: $P = x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2$.	0,50 đ
	Đề ý rằng $x + y = x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$ và $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$	0,50 đ

	Suy ra $x + y \geq (x + y)^2 - \frac{3}{4}(x + y)^2 \Leftrightarrow (x + y)[(x + y) - 4] \leq 0$	0,50 đ
	Hay $0 \leq x + y \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq (x + y)^2 \leq 16$.	0,50 đ
	Vậy $\text{Max } P = 16$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 2$.	0,50 đ
6		3,00 đ
	a) Chứng minh $\widehat{FKB} = \widehat{EKC}$ Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của B, C lên EF. Khi đó: $\widehat{BFM} = \widehat{AFE} = \widehat{AEF} = \widehat{CEN}$ $\Rightarrow \triangle BFM \sim \triangle CEN$ $\Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{CD}$.	1,00 đ 0,50 đ
	Mặt khác, $BM \parallel DK \parallel CN$ nên theo định lý Thales ta có: $\frac{BD}{CD} = \frac{MK}{NK} \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{MK}{NK} \Rightarrow \triangle BMK \sim \triangle CNK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{EKC}$.	0,50 đ
	b) Chứng minh đẳng thức: $EK.FP = FK.EQ$. Để chứng minh được $\widehat{BFP} = \widehat{CEQ}, \widehat{FBP} = \widehat{ECQ}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$). Do đó $\triangle BFP \sim \triangle CEQ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{FB}{EC} = \frac{FP}{EQ}$ (1).	1,00 đ 0,50 đ
	Theo a) $\widehat{FKB} = \widehat{EKC}$. Kết hợp với $\widehat{BFK} = \widehat{CEK} \Rightarrow \triangle BFK \sim \triangle CEK$ (g.g); suy ra $\frac{FB}{EC} = \frac{FK}{EK}$ (2).	0,25 đ
	Từ (1) và (2) suy ra $\frac{FP}{EQ} = \frac{FK}{EK} \Leftrightarrow EK.FP = FK.EQ$ (đpcm).	0,25 đ
	c) Chứng minh KD là phân giác của $\widehat{HKI}$	1,00 đ
	Theo b): $\frac{FP}{EQ} = \frac{FK}{EK} = \frac{FP - FK}{EQ - EK} = \frac{KP}{KQ} \Rightarrow \frac{EK}{QK} = \frac{FK}{PK} = \frac{EK + FK}{QK + PK} = \frac{EF}{QP}$ (3).	0,25 đ
	Hơn nữa, do $IE \parallel HP, IF \parallel HQ, IE = IF$ nên $\widehat{IEF} = \widehat{HPQ} = \widehat{IFE} = \widehat{HQP}$. Do đó $\triangle IEF \sim \triangle HQP$ (g.g).	0,25 đ
	Ta có $\triangle IEF \sim \triangle HQP \Rightarrow \frac{IE}{HQ} = \frac{EF}{QP}$ (4).	0,25 đ
	Từ (3) và (4) ta có $\frac{EK}{QK} = \frac{IE}{HQ} \Rightarrow \triangle IKE \sim \triangle HKQ$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IKE} = \widehat{HKQ}$ Suy ra $\widehat{IKD} = 90^\circ - \widehat{IKE} = 90^\circ - \widehat{HKQ} = \widehat{HKD}$, hay KD là phân giác $\widehat{IKH}$.	0,25 đ

