

Câu 1: (5,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x-1+\frac{1}{x^2+3}=y+\frac{1}{y^2+2y+4} \\ \sqrt{2x^2-9y}+3=\sqrt{2y-1}+3\sqrt{x-3} \end{cases} \quad \text{với } x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2: (4,0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \frac{u_n(2u_n^2+2)}{2u_n^2-u_n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

a) Tính giới hạn $\lim \left(\frac{1}{u_1^2+1} + \frac{1}{u_2^2+1} + \dots + \frac{1}{u_n^2+1} \right).$

b) Với mỗi số nguyên dương n , đặt $v_n = n^a \cdot u_n^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của a để dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn.

Câu 3: (3,0 điểm) Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2 - xf(y)) + f(xy) = (x - y)f(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số lẻ.

b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn yêu cầu.

Câu 4: (4,0 điểm) Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Lấy điểm K thuộc (O) sao cho $\widehat{AKH} = 90^\circ$ và lấy điểm G thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF sao cho $\widehat{DGH} = 90^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn HA, HK .

a) Gọi P là trung điểm của đoạn BC . Chứng minh ba điểm P, H, K thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng GM và DN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC .

Câu 5: (4,0 điểm)

a) Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 2025\}$. Hỏi có bao nhiêu cách phân hoạch X thành ba tập hợp con khác rỗng?

b) Cho số nguyên dương $n \geq 4$ và n đường thẳng trên mặt phẳng sao cho không có hai đường thẳng song song và không có ba đường thẳng đồng quy. Các đường thẳng này chia mặt phẳng thành các phần. Chứng minh có ít nhất $\frac{2}{3}(n-1)$ phần là tam giác.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:..... Họ tên, chữ ký GT 1

Số báo danh: Họ tên, chữ ký GT 2