

Câu 1: (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) : \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}$ với $a > b > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P khi $b = a - 1$.

Câu 2: (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = (m+1)x - 2m + 6$ ($m \neq -1$) và parabol (P): $y = 2x^2$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ đều lớn hơn 1.

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $2x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0$ (x là ẩn số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 và chứng minh $|x_1 + x_2 + 3x_1x_2| \leq 5$.

b) Giải phương trình $x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{16}{x^3} + \frac{16}{x^4}}$.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho 3 điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó và (O) là một đường tròn thay đổi luôn đi qua B và C sao cho O không thuộc đường thẳng BC. Qua A kẻ các tiếp tuyến AE, AF với đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm và F thuộc cung nhỏ BC của (O)). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC, N là giao điểm của EF và AO. Đường thẳng FI cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng :

a) Tứ giác AEIF nội tiếp và hai đường thẳng AB, EK song song với nhau ;

b) $\widehat{ANB} = \widehat{OBC}$;

c) Khi đường tròn (O) thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIN luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Câu 5: (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện sau :

$$x^2y - y^2x - 2x^2 - 3y^2 + 10xy - 16x + 21y = 100.$$

b) Chứng minh rằng từ 1012 số nguyên bất kỳ, luôn có thể chọn ra hai số mà hiệu bình phương của chúng là một số nguyên chia hết cho 2021.

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:

Chữ ký của CBCT 1: Chữ ký của CBCT 2:

H O C M A I

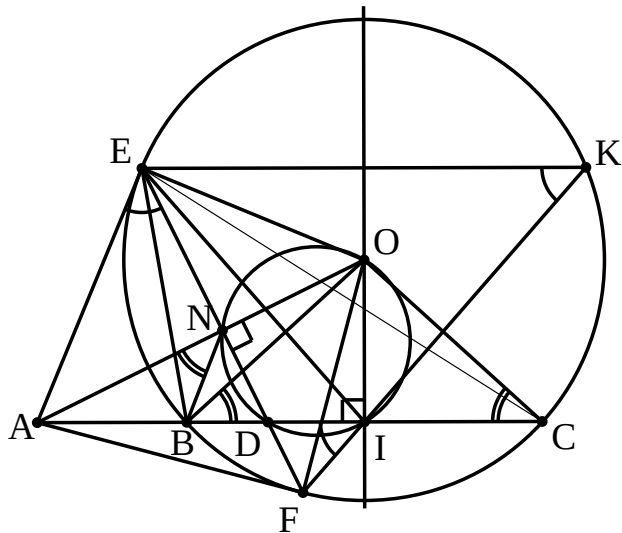
HƯỚNG DẪN CHẤM – ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Nội dung có 04 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1 (1,5 điểm)	Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2} - a+b} \right) : \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}$ với $a > b > 0$.	1,50
	a) Rút gọn biểu thức P.	1,00
	Ta có $P = \left[\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{(\sqrt{a-b})^2}{\sqrt{a-b}(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})} \right] \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	0,25
	$= \sqrt{a-b} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	0,25
	$= \frac{2\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a+b}}{(a+b) - (a-b)} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$	0,25
	$= \frac{a^2+b^2}{b}$.	0,25
	b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P khi $b = a - 1$.	0,50
	Thay $a = b + 1$ vào biểu thức P ta được $P = \frac{(b+1)^2 + b^2}{b} = \frac{2b^2 + 2b + 1}{b} = 2 + 2b + \frac{1}{b} \geq 2 + 2\sqrt{2b \cdot \frac{1}{b}} = 2 + 2\sqrt{2}$.	0,25
2 (1,5 điểm)	$P = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2b = \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2 + 2\sqrt{2}$ khi $a = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ và $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	0,25
	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = (m+1)x - 2m + 6$ ($m \neq -1$) và parabol (P): $y = 2x^2$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ đều lớn hơn 1.	1,50
	Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $2x^2 = (m+1)x - 2m + 6$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = mx - 2m \Leftrightarrow (x-2)(2x+3) = m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)(2x+3-m) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \frac{m-3}{2}$.	0,25

	Parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\frac{m-3}{2} \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 7$.	0,25
	Các giao điểm của (P) và (d) có hoành độ đều lớn hơn 1 khi $\frac{m-3}{2} > 1 \Leftrightarrow m > 5$.	0,25
	Vậy $\begin{cases} m > 5 \\ m \neq 7 \end{cases}$.	0,25
3 (2,0 điểm)	a) Cho phương trình $2x^2 - 2mx + m^2 - 2 = 0$ (x là ẩn số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 và chứng minh $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 \leq 5$.	1,00
	Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta' = m^2 - 2(m^2 - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.	0,25
	Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = m, x_1x_2 = \frac{m^2 - 2}{2}$.	0,25
	Do đó $A = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = \left m + \frac{3(m^2 - 2)}{2} \right = \frac{1}{2} 3m^2 + 2m - 6 = \frac{1}{2} \left 3 \left(m + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{19}{3} \right $.	
	Vì $-2 \leq m \leq 2$ nên $-\frac{5}{3} \leq m + \frac{1}{3} \leq \frac{7}{3} \Rightarrow 0 \leq \left(m + \frac{1}{3} \right)^2 \leq \frac{49}{9}$.	0,25
	Suy ra $-10 < -\frac{19}{3} \leq 3 \left(m + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{19}{3} \leq 10$. Vậy $ x_1 + x_2 + 3x_1x_2 \leq 5$.	0,25
	b) Giải phương trình: $x + \left(3 - \frac{4}{x} \right) \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{16}{x^3} + \frac{16}{x^4}}$ (1).	1,00
	Điều kiện : $x \neq 0, x+1 \geq 0$ và $\frac{16}{x^3} + \frac{16}{x^4} \geq 0$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x + \left(3 - \frac{4}{x} \right) \sqrt{x+1} = \frac{4\sqrt{x+1}}{x^2} \Leftrightarrow x^3 + (3x^2 - 4x)\sqrt{x+1} = 4\sqrt{x+1}$ $\Leftrightarrow x^3 + 3x^2\sqrt{x+1} - 4x\sqrt{x+1} - 4\sqrt{x+1} = 0$ $\Leftrightarrow x^3 + 3x^2\sqrt{x+1} - 4(x+1)\sqrt{x+1} = 0$ (2).	0,25
	Vì $x = -1$ không phải là nghiệm của (2) nên (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right)^2 - 4 = 0$.	0,25
	Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$, phương trình trở thành $t^3 + 3t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$.	0,25

	$t = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{x+1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$ $t = -2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = -2 \Leftrightarrow x = -2\sqrt{x+1} \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x = 2 + \sqrt{2}.$ Đổi chiều điều kiện và thử lại vào phương trình đầu, ta có tập nghiệm của phương trình là $\left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2 - 2\sqrt{2} \right\}.$	0,25	
4 (3,0 điểm)	Cho 3 điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó và (O) là một đường tròn thay đổi luôn đi qua B và C sao cho O không thuộc đường thẳng BC. Qua A kẻ các tiếp tuyến AE, AF với đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm và F thuộc cung nhỏ BC của (O)). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC, N là giao điểm của EF và AO. Đường thẳng FI cắt (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng :	3,00	
	a) Tứ giác AEIF nội tiếp và hai đường thẳng AB, EK song song với nhau ;	1,00	
		Ta có $\widehat{AEO} = \widehat{AFO} = \widehat{AIO} = 90^\circ$	0,25
		suy ra tứ giác AEIF nội tiếp đường tròn đường kính AO.	0,25
		Vì tứ giác AEIF nội tiếp nên $\widehat{AIF} = \widehat{AEF}$. Mặt khác, $\widehat{AEF} = \widehat{EKF}$ (cùng chắn cung EF của (O)).	0,25
		Suy ra $\widehat{AIF} = \widehat{EKF}$ và chúng ở vị trí đồng vị nên $EK \parallel AB$.	0,25
	b) $\widehat{ANB} = \widehat{OBC}$;	1,00	
	Ta có AO là đường trung trực của EF do đó tam giác AEO vuông tại E và có đường cao EN. Suy ra $AE^2 = AN.AO$ (1).	0,25	
	Hai tam giác ABE và AEC có $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$ và $\widehat{BEA} = \widehat{ACE}$ (cùng chắn cung BE của (O)) nên đồng dạng với nhau. Do đó $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AC}$ hay $AE^2 = AB.AC$ (2).	0,25	
	Từ (1) và (2) suy ra $AN.AO = AB.AC$ hay $\frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AO}$ (3).	0,25	
	Từ (3) và $\widehat{BAN} = \widehat{OAC}$ suy ra hai tam giác ABN và AOC đồng dạng với nhau. Do đó $\widehat{ANB} = \widehat{ACO}$.		
	Vì tam giác BOC cân tại O nên $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \widehat{ACO}$. Vậy $\widehat{ANB} = \widehat{OBC}$.	0,25	

5 (2,0 điểm)	c) Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIN luôn nằm trên một đường thẳng cố định.	1,00
	Gọi D là giao điểm của đoạn thẳng BC và EF. Hai tam giác AND và AIO có $\widehat{DNA} = \widehat{OIA} = 90^\circ$ và $\widehat{NAD} = \widehat{IAO}$ nên đồng dạng với nhau.	0,25
	Suy ra $\frac{AN}{AI} = \frac{AD}{AO} \Rightarrow AD = \frac{AN \cdot AO}{AI} = \frac{AB \cdot AC}{AI}$.	0,25
	Vì A, B, C, I cố định nên AD không đổi, suy ra D cố định.	0,25
	Ta có $\widehat{DNO} + \widehat{DIO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ suy ra tứ giác DNOI nội tiếp. Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIN luôn nằm trên đường thẳng cố định, đó là đường trung trực của đoạn thẳng DI.	0,25
	a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn điều kiện sau : $x^2y - y^2x - 2x^2 - 3y^2 + 10xy - 16x + 21y = 100.$	1,00
	Ta có $x^2y - y^2x - 2x^2 - 3y^2 + 10xy - 16x + 21y = 100$ $\Leftrightarrow (y-2)x^2 + (-y^2 + 10y - 16)x - 3y^2 + 21y - 30 = 70$ $\Leftrightarrow (y-2)(x^2 + (-y+8)x - 3y + 15) = 70$ $\Leftrightarrow (y-2)(x+3)(x-y+5) = 70 = 1.2.5.7.$	0,25
	Đề ý rằng $x+3 = (y-2) + (x-y+5)$ nên xét các trường hợp sau: • Nếu $x+3 > 0$ thì $y-2$ và $x-y+5$ cùng dương, lúc đó ta có $\begin{cases} x+3=7 \\ y-2=5 \\ x-y+5=2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x+3=7 \\ y-2=2 \\ x-y+5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}.$	0,25
	• Nếu $x+3 < 0$ thì $y-2$ và $x-y+5$ trái dấu, lúc đó ta có $\begin{cases} x+3=-2 \\ y-2=-7 \\ x-y+5=5 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x+3=-2 \\ y-2=5 \\ x-y+5=-7 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x+3=-5 \\ y-2=2 \\ x-y+5=-7 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x+3=-5 \\ y-2=-7 \\ x-y+5=2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-5 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x=-5 \\ y=7 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x=-8 \\ y=4 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x=-8 \\ y=-5 \end{cases}.$ Vậy $(x; y) \in \{(4; 7), (4; 4), (-5; -5), (-5; 7), (-8; 4), (-8; -5)\}.$	0,25
	b) Chứng minh rằng từ 1012 số nguyên bất kỳ, luôn có thể chọn ra hai số mà hiệu bình phương của chúng là một số nguyên chia hết cho 2021.	1,00
	Nếu trong 1012 số tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2021 thì hiệu của chúng chia hết cho 2021 do đó hiệu bình phương của chúng chia hết cho 2021.	0,25
	Nếu trong 1012 số này không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 2021 thì xét 1011 tập hợp sau $\{0\}; \{a; 2021-a\}$ với $a = 1, 2, \dots, 1010$. Vì có 1012 số nguyên dương	0,25

và 1011 tập hợp nên tồn tại 2 số nguyên dương trong 1012 số sao cho khi chia cho 2021 thì số dư của chúng thuộc cùng một tập trong 1011 tập hợp trên.	
Vì hai số này không cùng số dư nên số dư của chúng khi chia cho 2021 cùng thuộc một tập hợp có dạng $\{a; 2021 - a\}$ với a nào đó thuộc tập hợp $\{1; 2; \dots; 1010\}$.	0,25
Khi đó tổng của hai số đó chia hết cho 2021 do đó hiệu bình phương của chúng chia hết cho 2021. Vậy luôn có thể chọn ra hai số mà hiệu bình phương của chúng là một số nguyên chia hết cho 2021.	0,25

Chú ý:

- Học sinh làm cách khác đáp án nhưng kết quả đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài chấm điểm lẻ đến 0,25.

----- Hết -----