

ĐỀ BÀI ĐỀ TOÁN CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2024-2025

Bài 1 (3.0 điểm).

a) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $|a| < 2024, |b| < 2024$ và

$$\sqrt{a+2024} + \sqrt{2025-a} - \sqrt{2024-a} = \sqrt{b+2024} + \sqrt{2025-b} - \sqrt{2024-b}$$

Tính giá trị của biểu thức $M = a^{2024} + a^{2025} - b^{2024} - b^{2025}$.

b) Tồn tại không hai số hữu tỉ dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2024}}$?

Bài 2 (2.0 điểm). Với hai số nguyên dương a và b , phép toán $a*b$ được định nghĩa như sau:

- $a*a = a$ với mọi số nguyên dương a .
- $a*b = b*a$ với mọi số nguyên dương a
- $a*b = (a-b)*b$ với mọi số nguyên dương $a > b$.

a) Tính $16*2024$.

b) Tìm một phép toán thỏa mãn đồng thời cả ba điều kiện trên.

Bài 3 (3.0 điểm). Cho đường tròn (O, R) và dây cung BC cố định không đi qua tâm O . A là một điểm di động trên đường tròn (O, R) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P và Q sao cho F nằm giữa P và E . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng

a) $AP^2 = AQ^2 = AH \cdot AD$.

b) Bốn điểm P, Q, M, D cùng nằm trên một đường tròn (ω) .

c) Tâm I của đường tròn (ω) luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 4 (1.0 điểm). Với mỗi số nguyên dương n , gọi $f(n)$ là tổng tất cả các chữ số của số $3n^2 + n + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của $f(n)$.

Bài 5 (1.0 điểm). Cho một bảng ô vuông 8×8 . Một miếng domino là một hình chữ nhật được tạo bởi hai ô vuông 1×1 liên tiếp có chung cạnh. Người ta lát bảng 8×8 bằng các miếng domino màu trắng (có hai ô vuông được tô màu trắng) hoặc màu đen (có hai ô vuông được tô màu đen) thỏa mãn đồng thời ba điều kiện:

- Hai miếng domino bất kỳ không cùng che một ô 1×1 .
- Mỗi hình vuông 2×2 bất kỳ đều có ít nhất một ô vuông màu đen.
- Cả bảng được lấp bởi các miếng domino trắng và đen.

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho ta có thể lát được bảng với đúng k miếng domino màu đen.

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN CHUYÊN LỚP 10/2024 THPT CHUYÊN DHSP

Võ Quốc Bá Cẩn - Nguyễn Lê Phước - Nguyễn Văn Quý - Nguyễn Tiến Dũng Trần Đức Hiếu
- Trần Quang Độ - Phan Quang Linh - Vũ Minh Đức - Đào Phúc Long

Bài 1 (3.0 điểm).

a) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $|a| < 2024, |b| < 2024$ và

$$\sqrt{a+2024} + \sqrt{2025-a} - \sqrt{2024-a} = \sqrt{b+2024} + \sqrt{2025-b} - \sqrt{2024-b}$$

Tính giá trị của biểu thức $M = a^{2024} + a^{2025} - b^{2024} - b^{2025}$.

b) Tồn tại không hai số hữu tỉ dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2024}}$?

Lời giải.

a) Giả thiết của bài toán có thể được viết lại thành

$$\sqrt{a+2024} + \frac{1}{\sqrt{2025-a} + \sqrt{2024-a}} = \sqrt{b+2024} + \frac{1}{\sqrt{2025-b} + \sqrt{2024-b}} \quad \#(1)$$

Nếu $a > b$, thì ta có $\sqrt{a+2024} > \sqrt{b+2024}$ và

$$\sqrt{2025-a} + \sqrt{2024-a} < \sqrt{2025-b} + \sqrt{2024-b}$$

Do đó $VT_{(1)} > VP_{(1)}$, mâu thuẫn. Tương tự, nếu $a < b$, thì ta có $VT_{(1)} < VP_{(1)}$, cũng dẫn đến mâu thuẫn. Do đó $a = b$ (thử lại thỏa mãn). Từ đây, ta suy ra $M = 0$.

b) Giả sử tồn tại hai số hữu tỉ dương a và b thỏa mãn yêu cầu đề bài. Từ giả thiết, ta có

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{506}$$

hay

$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{506} - (a + b)$$

Từ đó

$$4ab = 2024 + (a + b)^2 - 4(a + b)\sqrt{506}$$

Suy ra $4(a + b)\sqrt{506}$ là số hữu tỉ. Mà $4(a + b)$ là số hữu tỉ và $\sqrt{506}$ là số vô tỉ nên điều này xảy ra chỉ khi $a + b = 0$, tức $a = b = 0$, mâu thuẫn. Vậy, không tồn tại hai số hữu tỉ dương a, b thỏa mãn yêu cầu.

Bình luận. Ý a) còn có cách khác như sau: Giả thiết có thể được viết lại thành

$$\sqrt{a+2024}-\sqrt{b+2024}+\sqrt{2024-b}-\sqrt{2024-a}=\sqrt{2025-b}-\sqrt{2025-a}$$

hay

$$\frac{a-b}{\sqrt{a+2024}+\sqrt{b+2024}}+\frac{a-b}{\sqrt{2024-b}+\sqrt{2024-a}}=\frac{a-b}{\sqrt{2025-b}+\sqrt{2025-a}}$$

Giả sử $a \neq b$, khi đó ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a+2024}+\sqrt{b+2024}}+\frac{1}{\sqrt{2024-b}+\sqrt{2024-a}}=\frac{1}{\sqrt{2025-b}+\sqrt{2025-a}}$$

mâu thuẫn vì $\text{VT} > \frac{1}{\sqrt{2024-b}+\sqrt{2024-a}} > \frac{1}{\sqrt{2025-b}+\sqrt{2025-a}}$. Do vậy $a=b$. Từ đó $M=0$.

Bài 2 (2.0 điểm). Với hai số nguyên dương a và b , phép toán $a*b$ được định nghĩa như sau:

- $a*a=a$ với mọi số nguyên dương a .
- $a*b=b*a$ với mọi số nguyên dương a
- $a*b=(a-b)*b$ với mọi số nguyên dương $a > b$.

a) Tính $16*2024$.

b) Tìm một phép toán thỏa mãn đồng thời cả ba điều kiện trên.

Lời giải. a) Từ giả thiết, dễ thấy với $a > kb$, với k nguyên dương thì

$$a*b=(a-b)*b=(a-2b)*b=\dots=(a-kb)*b$$

Sử dụng kết quả này với chú ý $2024=126 \cdot 16+8$, ta được

$$16*2024=2024*16=(2024-126 \cdot 16)*16=8*16=16*8=8*8=8$$

b) Ta sẽ chứng minh với a, b là hai số nguyên dương bất kỳ thì

$$a*b=(a,b)$$

trong đó (a,b) là ước chung lớn nhất của hai số a và b , là một quy tắc của phép toán $*$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Thật vậy, hiển nhiên $a*a=(a,a)=a$ và $a*b=(a,b)=(b,a)=b*a$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh

$$(a,b)=(a-b,b)$$

Đặt $m=(a,b)$ và $n=(a-b,b)$. Ta thấy rằng

- Cả hai số a, b đều chia hết cho m nên $a-b$ và b cũng chia hết cho m . Suy ra $(a-b, b)$ chia hết cho m , hay n chia hết cho m .
- Cả hai số $a-b, b$ đều chia hết cho n nên $a-b+b=a$ và b cũng chia hết cho n . Suy ra (a, b) chia hết cho n , hay m chia hết cho n .

Như vậy $(a, b) = (a-b, b)$. Từ đây, ta suy ra, với $a > b$ thì

$$a*b = (a, b) = (a-b, b) = (a-b)*b$$

Tóm lại, $a*b = (a, b)$ là một quy tắc của phép toán $*$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

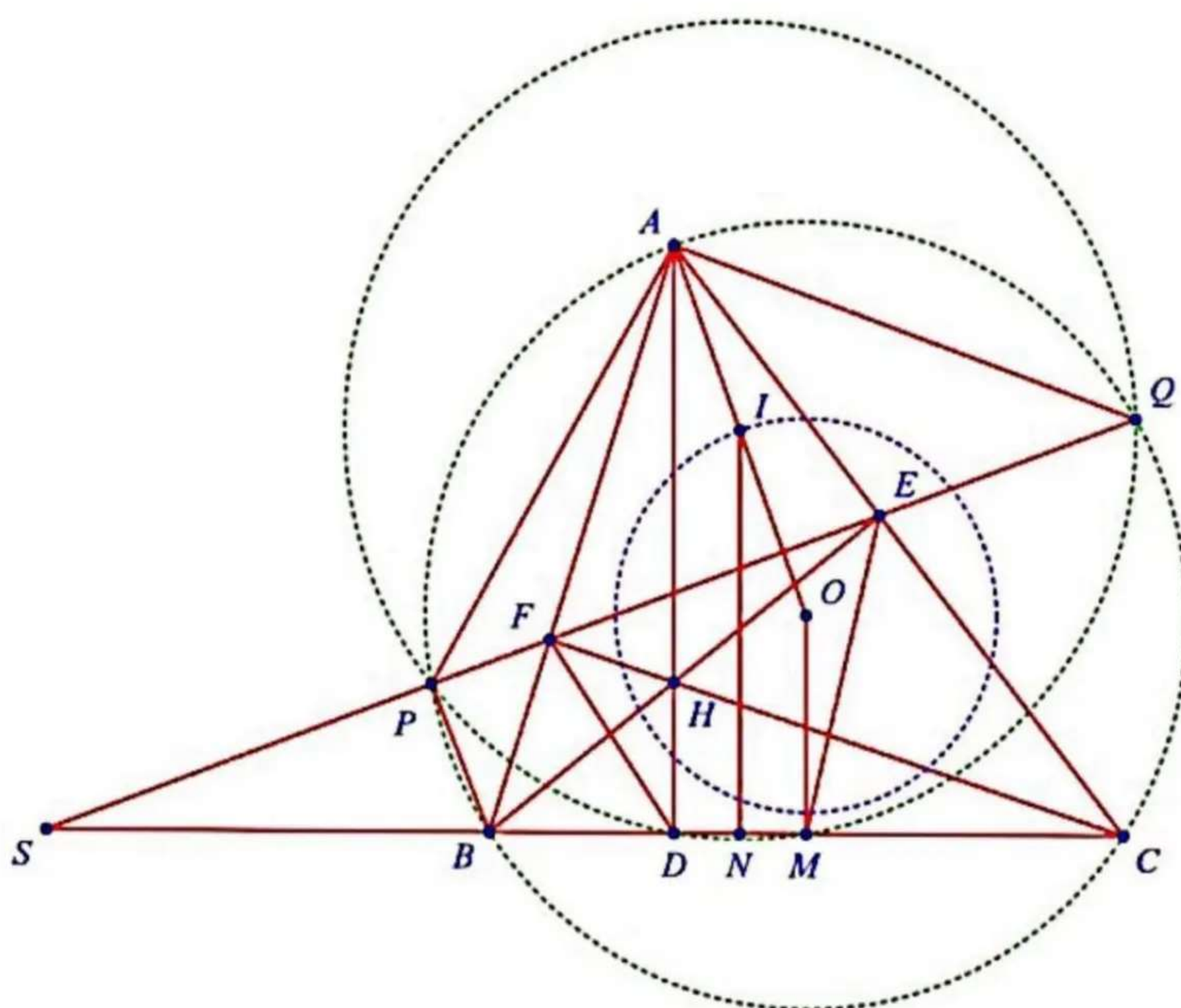
Bài 3 (3.0 điểm). Cho đường tròn (O, R) và dây cung BC cố định không đi qua tâm O . A là một điểm di động trên đường tròn (O, R) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P và Q sao cho F nằm giữa P và E . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng

a) $AP^2 = AQ^2 = AH \cdot AD$.

b) Bốn điểm P, Q, M, D cùng nằm trên một đường tròn (ω) .

c) Tâm I của đường tròn (ω) luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải.



a) Ta có $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ và $\angle HDB + \angle HFB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên các tứ giác $BCEF$ và $BDHF$ nội tiếp. Lại có tam giác OAC cân tại O nên

$$\angle OAC = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle AEF$$

Suy ra $\angle OAC + \angle AEF = 90^\circ$. Từ đây, ta có $OA \perp PQ$.

Xét đường tròn (O, R) có A là điểm chính giữa của cung PAQ nên $AP = AQ$. Suy ra

$$\angle APQ = \angle AQP = \angle ABP$$

Từ đó, dễ thấy hai tam giác ABP và APF đồng dạng (g-g). Suy ra

$$AQ^2 = AP^2 = AB \cdot AF = AD \cdot AH$$

b) Ta xét các điểm ở vị trí như trong hình vẽ, các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Do các tứ giác $BCEF, BDHF$ nội tiếp nên $\angle CFE = \angle CBE = \angle HFD$. Suy ra $\angle DFE = 2\angle CFE$.

Vì M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCEF$ nên $\angle CME = 2\angle CFE = \angle DFE$. Suy ra tứ giác $DMEF$ nội tiếp. Bây giờ, gọi S là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC . Ta có $SD \cdot SM = SE \cdot SF = SB \cdot SC = SP \cdot SQ$. Do đó, bốn điểm P, Q, M, D cùng thuộc đường tròn (ω) .

c) Do điểm I thuộc đường trung trực của PQ và $AO \perp PQ$ nên điểm I thuộc đường thẳng AO . Qua điểm I , kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DM tại điểm N thì N là trung điểm của đoạn thẳng DM và $AD \parallel OM \parallel IN$. Áp dụng tính chất đường trung bình của hình thang, ta có I là trung điểm của đoạn thẳng OA . Suy ra $OI = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$ không đổi. Vậy, tâm I

của đường tròn (ω) luôn thuộc đường tròn $\left(O, \frac{R}{2}\right)$ cố định khi điểm A thay đổi.

Bài 4 (1.0 điểm). Với mỗi số nguyên dương n , gọi $f(n)$ là tổng tất cả các chữ số của số $3n^2 + n + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của $f(n)$.

Lời giải. Hiển nhiên $f(n) > 0$ với mọi n nguyên dương. Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho $f(n) = 1$, khi đó $3n^2 + n + 1 = 10^k$ với k tự nhiên. Tuy nhiên, vì $3n^2 + n + 1$ là số lẻ nên ta phải có $k = 0$, từ đó $3n^2 + n + 1 = 1$, mâu thuẫn.

Bây giờ, giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho $f(n) = 2$, khi đó $3n^2 + n + 1 = 10^k + 10^\ell$ với k, ℓ là các số tự nhiên và $k > \ell$. Vì $3n^2 + n + 1$ là số lẻ nên ta phải có $\ell = 0$, từ đó $3n^2 + n = 10^k$, hay $n(3n + 1) = 2^k \cdot 5^k$. Đến đây, với chú ý $(n, 3n + 1) = 1$ và $3n + 1 > n > 1$ ($n = 1$ hiển nhiên không thỏa mãn), ta suy ra $n = 2^k$ và $3n + 1 = 5^k$, hay $3 \cdot 2^k + 1 = 5^k$. Một cách tương đương, ta có

$$3\left(\frac{2}{5}\right)^k + \left(\frac{1}{5}\right)^k = 1$$

Với $k \geq 2$, ta có $3\left(\frac{2}{5}\right)^k + \left(\frac{1}{5}\right)^k \leq 3\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{13}{25} < 1$, mâu thuẫn. Do đó $k = 1$. Tuy nhiên, khi thử lại, ta thấy không thỏa mãn.

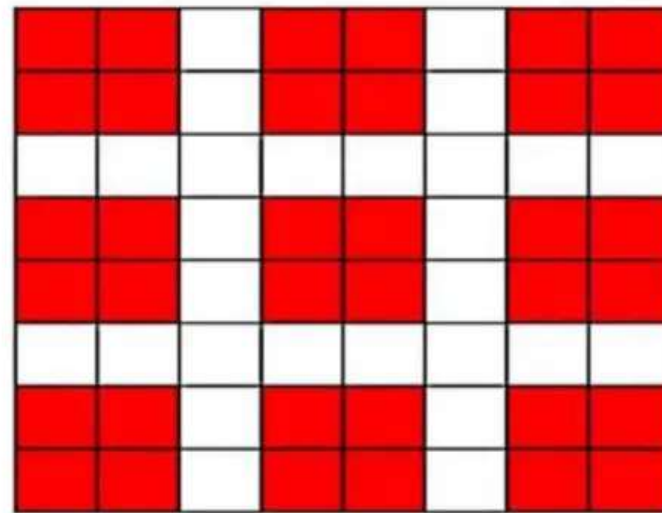
Như vậy, ta phải có $f(n) \geq 3$. Mặt khác, với $n = 8$ thì $3n^2 + n + 1 = 201$, lúc này $f(n) = 3$. Vậy $\min f(n) = 3$.

Bài 5 (1.0 điểm). Cho một bảng ô vuông 8×8 . Một miếng domino là một hình chữ nhật được tạo bởi hai ô vuông 1×1 liên tiếp có chung cạnh. Người ta lát bảng 8×8 bằng các miếng domino màu trắng (có hai ô vuông được tô màu trắng) hoặc màu đen (có hai ô vuông được tô màu đen) thỏa mãn đồng thời ba điều kiện:

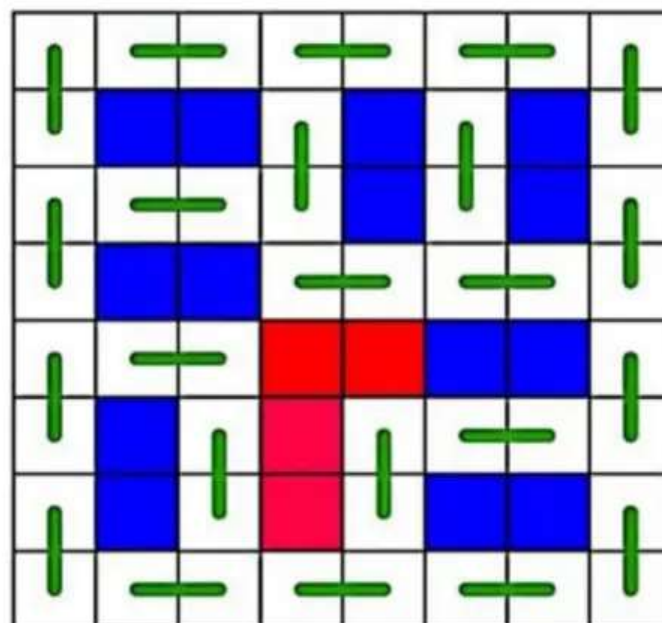
- Hai miếng domino bất kỳ không cùng che một ô 1×1 .
- Mỗi hình vuông 2×2 bất kỳ đều có ít nhất một ô vuông màu đen.
- Cả bảng được lấp bởi các miếng domino trắng và đen.

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho ta có thể lát được bảng với đúng k miếng domino màu đen.

Lời giải. Xét các bảng con 2×2 được đánh dấu như hình vẽ bên dưới.



Trong mỗi bảng con sẽ có ít nhất một ô vuông được tô màu đen. Do đó, số miếng domino màu đen cần sử dụng không ít hơn 9, tức $k \geq 9$. Mặt khác, với $k = 9$, cách lát sau thỏa mãn yêu cầu đề bài (các đoạn thẳng màu xanh lá cây là các vị trí lát các miếng domino màu trắng).



Vậy $k_{\min} = 9$.