

Bài 1. a) Cho biểu thức $A = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

Rút gọn và tính giá trị biểu thức $B = \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ khi $a = \sqrt[3]{8\sqrt{5}} - 16$; $b = \sqrt{5} + 1$

b) Chứng minh rằng biểu thức $C = 4x(x + y)(x + y + z)(x + z) + y^2z^2$ là một số chính phương với x, y, z là các số nguyên.

Bài 2. a) Cho đa thức $f(x) = (1 + x + x^3)^{2023} = a_{4046}x^{4046} + a_{4045}x^{4045} + \dots + a_1x + a_0$. Gọi m là tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc chẵn của biến x ; n là tổng các hệ số ứng với lũy thừa bậc lẻ của biến x . Chứng minh rằng m là số chẵn và n là số lẻ.

b) Tìm số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ thỏa mãn $\sqrt{a+b} = \frac{\overline{ab}}{a+b}$.

Bài 3. a) Giải phương trình $(x + 4)\sqrt{x^2 + 7} = x^2 + 4x + 7$.

b) Cho x, y là hai số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $D = \frac{(x + y)(1 + xy)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$.

Bài 4. 1) Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Các tia phân giác của $\widehat{EHB}$, $\widehat{DHC}$ cắt AB , AC lần lượt tại I và K .

a) Chứng minh rằng $AI = AK$.

b) Qua I và K lần lượt vẽ các đường vuông góc với AB và AC chúng cắt nhau tại M . Giả sử hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A thay đổi. Chứng minh đường thẳng HM luôn đi qua một điểm cố định.

2) Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A thay đổi thỏa mãn hai đường trung tuyến BM và CN vuông góc với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot B + \cot C$.

Bài 5. Cho hình lập phương trong đó mỗi mặt tương ứng được ghi một số trong tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (số được ghi trên hai mặt bất kỳ là khác nhau). Hỏi có thể ghi số trên các mặt sao cho số trên mỗi mặt là ước của tổng bốn số trên các mặt bên cạnh nó? Vì sao?