

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (2,0 điểm)

- Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a + b + c = 1$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c có ít nhất một số bằng 1
- Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x + y + z = 2045$ và $(x - 18)^3 + (y - 7)^3 + (z - 2020)^3 = 0$. Tính giá trị biểu thức $F = (x - 18)^{2021} + (y - 7)^{2021} + (z - 2020)^{2021}$

Câu II. (2,0 điểm)

- Giải phương trình $1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12x}$
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy - 3y = 4x^2 + 3x + 3 \\ y^2 + 4y + 18 = 7x^2 + 16x \end{cases}$

Câu III. (2,0 điểm)

- Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $xy^2 - (x - 2)(x^4 + 2x + 1) = 2y^2$
- Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($a, b, n \in \mathbb{N}, 0 < b < 10, n > 3$) thì $ab \vdots 6$

Câu IV. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $\angle BAC > 45^\circ$. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các hình vuông $ABMN$ và $ACPQ$. Đường thẳng AQ cắt đoạn thẳng BM tại E , đường thẳng AN cắt đoạn thẳng CP tại F

- Chứng minh tứ giác $EFQN$ nội tiếp trong một đường tròn
- Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF . Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$
- Đường thẳng MN cắt đường thẳng PQ tại D . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNP cắt nhau tại K ($K \neq D$). Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại J . Chứng minh 4 điểm D, A, K, J thẳng hàng

Câu V. (1,0 điểm)

Trên một đường tròn ta lấy 2024 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Tại mỗi điểm người ta ghi một số thực khác 0 và 1 sao cho quy tắc sau được thỏa mãn “ số ghi tại mỗi điểm màu xanh bằng tổng của hai số ghi tại hai điểm màu đỏ kề nó; số ghi tại mỗi điểm màu đỏ bằng tích của 2 số ghi tại hai điểm màu xanh kề nó”. Tính tổng của 2024 số đó

ĐÁP ÁN

Câu I.

$$1) \text{ Xét tích } (a-1)(b-1)(c-1) = abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \\ = abc - (ab + bc + ca)$$

$$\text{Từ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow ab + bc + ca = abc$$

Suy ra $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$. Vậy 3 số a, b, c có ít nhất 1 số bằng 1.

2) Ta thấy, với 3 số a, b, c tùy ý thì

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) \\ = (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b) \\ = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Do đó nếu $a+b+c=0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Đặt $a = x - 18, b = y - 7, c = z - 2020$ từ giả thiết suy ra $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\text{Mặt khác, theo giả thiết, ta có: } a^3 + b^3 + c^3 = 0 \Rightarrow 3abc = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } a = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}, \text{ 2 trường hợp còn lại tương tự}$$

$$\text{Vậy } F = a^{2021} + b^{2021} + c^{2021} = 0$$

Câu II.

$$1. \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

Nếu $x < -1$ thì phương trình vô nghiệm do hai vế trái dấu

$$\text{Nếu } x > 1, \text{ phương trình tương đương với } x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12} \Leftrightarrow \left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)^2 = \left(\frac{35}{12} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{x^2 - 1} + 2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1225}{144}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2 - 1} + 2 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1225}{144} = 0$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0, \text{ phương trình trở thành:}$$

$$t^2 + 2t - \frac{1225}{144} = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 - \left(\frac{37}{12}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{12} \text{ (do } t > 0). \text{ Khi đó}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{25}{12} \Leftrightarrow 25\sqrt{x^2-1} = 12x^2 \Leftrightarrow 144x^4 - 625x^2 + 625 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{25}{9} \\ x^2 = \frac{25}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5}{3} \\ x = \pm \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện } x > 1 \Rightarrow x = \frac{5}{4}; x = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{5}{3}; \frac{5}{4} \right\}$$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} xy - 3y = 4x^2 + 3x + 3 \\ y^2 + 4y + 18 = 7x^2 + 16x \end{cases}$$

Nhân phương trình đầu với 2 rồi trừ đi phương trình thứ 2 về theo về ta được:

$$2x - y^2 - 10y - 18 = x^2 - 10x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 10x + 10y + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 5)^2 = 1 \Leftrightarrow x - y - 5 = \pm 1$$

$$+) x - y - 5 = 1 \Rightarrow y = x - 6$$

$$\Rightarrow x(x - 6) - 3(x - 6) = 4x^2 + 3x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -5 \\ x = -5 \Rightarrow y = -11 \end{cases}$$

$$+) x - y - 5 = -1 \Rightarrow y = x - 4$$

$$\Rightarrow x(x - 4) - 3(x - 4) = 4x^2 + 3x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 10x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 - 2\sqrt{13}}{3} \Rightarrow y = \frac{-17 - 2\sqrt{13}}{3} \\ x = \frac{-5 + 2\sqrt{13}}{3} \Rightarrow y = \frac{-17 + 2\sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm như trên.

Câu III.

1) Giả sử $(x; y)$ là cặp số nguyên thỏa mãn phương trình đã cho

$$\text{Khi đó } xy^2 - (x - 2)(x^4 + 2x + 1) = 2y^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^4 + 2x + 1 - y^2) = 0. \text{ Ta thấy, với } x = 2 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$$

Với $x \neq 2$ thì phương trình trở thành $x^4 + 2x + 1 = y^2$

Nếu $x > 2 \Rightarrow x^4 < x^4 + 2x + 1 = y^2 < x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

Do x là số nguyên nên x^4 & $(x^2 + 1)^2$ là hai số chính phương liên tiếp, suy ra không tồn tại y nguyên thỏa mãn bất đẳng thức trên. Vì vậy, trường hợp này phương trình không có nghiệm nguyên.

Nếu $x < -2 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 < x^4 + 2x + 1 = y^2 < x^4$. Lập luận tương tự ta thấy trường hợp này phương trình cũng không có nghiệm nguyên

$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0(tm)$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1(tm)$

$\Rightarrow x = 1 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2(tm)$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình gồm

$(-1; 0); (0; \pm 1); (1; \pm 2); (2; y \forall y \in \mathbb{Z})$

2) Vì $2^n = 10a + b$ và $0 < b < 10 \Rightarrow 2^n$ có tận cùng bằng b

Đặt $n = 4k + r (k, r \in \mathbb{Z}, k > 0; 0 \leq r \leq 3) \Rightarrow 2^n = 2^{4k+r} = 16^k \cdot 2^r$

Nếu $r = 0 \Rightarrow 2^n = 16^k$ có tận cùng bằng 6 nên $b = 6 \Rightarrow ab : 6(1)$

Nếu $1 \leq r \leq 3 \Rightarrow 2^n - 2^r = 2^r (16^k - 1)$ có tận cùng bằng 0 (vì $16^k - 1$ có tận cùng bằng 5)

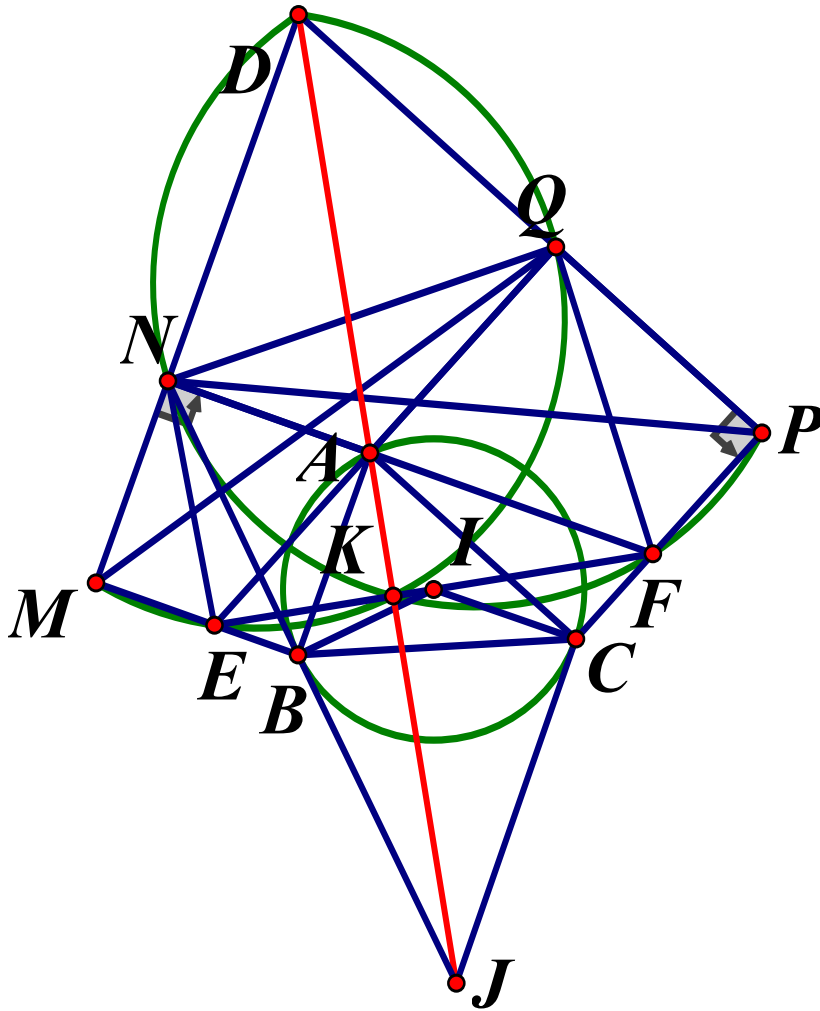
$\Rightarrow 2^n$ có tận cùng là 2^r , hay $b = 2^r$

Khi đó $10a = 2^n - b = 2^n - 2^r = 2^r (16^k - 1) : 15 \Rightarrow 10a : 3 \Rightarrow a : 3$

Mặt khác $2^n = 10a + b : 2 \Rightarrow b : 2$. Do đó $ab : 6(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $ab : 6$

Câu IV.



1) Xét hai tam giác vuông ABE và ACF có

$$\angle ABE = \angle ACF = 90^\circ; \angle EAB = \angle FAC \text{ (cùng phụ với } \angle BAC)$$

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACF \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AN}{AQ} = \frac{AE}{AF}$$

Xét hai tam giác ANE và AQF có $\angle NAE = \angle QAF$ (đối đỉnh); $\frac{AN}{AQ} = \frac{AE}{AF}$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle ANE \sim \triangle AQF \Rightarrow \angle ENA = \angle FQA = \angle ENF = \angle FQE$$

$\Rightarrow EFQN$ là tứ giác nội tiếp

2) Gọi V là giao điểm của hai đường thẳng EB, FC

Tứ giác $EAFV$ có $AF \parallel EV, AE \parallel VF$ nên nó là hình bình hành

Vì I là trung điểm của đoạn thẳng EF nên nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng AV . Suy ra 3 điểm A, I, V thẳng hàng

Mặt khác, ta thấy tứ giác $ABVC$ có $\angle ABV = \angle ACV = 90^\circ$ nên nó nội tiếp trong đường tròn đường kính AV suy ra $IA = IB = IC$

Hay I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

3) Ta chứng minh D, A, K thẳng hàng

Gọi K' là giao điểm của DA và EF , dễ thấy tứ giác $NDQA$ nội tiếp nên $\angle NDQ = \angle NAK'$. Do đó tứ giác $NDFK'$ nội tiếp

Mặt khác, do tứ giác $NDPF$ nội tiếp nên 5 điểm N, D, P, F, K' cùng thuộc một đường tròn.

Vậy K' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác NDP

Chứng minh tương tự ta cũng có K' cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác

$DMQ \Rightarrow K \equiv K' \Rightarrow 3$ điểm D, A, K thẳng hàng.(1)

Ta chứng minh A, K, J thẳng hàng

Do 5 điểm D, Q, K, E, M cùng thuộc một đường tròn nên $\angle AKE = \angle DQE = 90^\circ$ suy ra

$AK \perp KE$. Từ đó suy ra tứ giác $AKBE$ nội tiếp nên $\angle EKB = \angle DQE = 90^\circ - \angle BAC$. Tương tự ta có $\angle FKC = \angle FAC = 90^\circ - \angle BAC$

Suy ra $\angle BKC = 180^\circ - (\angle EKB + \angle FKC) = 2\angle BAC = \angle BIC$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn 1 cung) $\Rightarrow BKIC$ là tứ giác nội tiếp

Mặt khác $\angle BJI = \angle JCI = 90^\circ$ nên $BICJ$ nội tiếp

Do đó 5 điểm B, K, I, C, J cùng thuộc một đường tròn nên ta có

$\angle IKJ = \angle JBI = 90^\circ \Rightarrow JI \perp EF$

Mà $AK \perp KE \Rightarrow A, K, J$ thẳng hàng (3)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Câu V.

Ta thấy trên đường tròn sẽ có 1012 điểm được tô màu xanh và 1012 điểm được tô màu đỏ. Xét 10 điểm liên tiếp bất kỳ trên đường tròn với điểm đầu tiên là màu xanh

Ta gọi 5 giá trị trên 5 điểm màu xanh là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và 5 giá trị trên điểm màu đỏ là b_1, b_2, b_3, b_4, b_5

Đặt $a_1 = m, b_1 = n (m, n \neq 0; 1)$, Theo quy tắc đề bài đưa ra ta có:

$a_2 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{n}{m}$	$b_2 = a_2 - b_1 = \frac{n}{m} - n = \frac{n(1-m)}{m}$
$a_3 = \frac{b_2}{a_2} = \frac{n(1-m)}{m} \cdot \frac{m}{n} = 1-m$	$b_3 = a_2 - b_2 = 1-m - \frac{n(1-m)}{m} = \frac{(1-m)(m-n)}{m}$
$a_4 = \frac{b_3}{a_3} = \frac{(1-m)(m-n)}{m} \cdot \frac{1}{1-m} = \frac{m-n}{m}$	$b_4 = a_3 - b_3 = \frac{m-n}{m} - \frac{(1-m)(m-n)}{m} = m-n$
$a_5 = \frac{b_4}{a_4} = (m-n) \frac{m}{m-n} = m = a_1$	$b_5 = a_4 - b_4 = m - (m-n) = n = b_1$

Như vậy từ một điểm màu xanh hoặc đỏ bất kỳ thì sau 4 điểm giá trị của nó sẽ lặp lại. Ta

$$\text{có: } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = m + \frac{n}{m} + 1 - m + \frac{m-n}{m} = 2$$

Tổng các giá trị trên các điểm màu xanh là : $(1012 : 4) \cdot 2 = 506$

Vì giá trị trên mỗi điểm màu xanh bằng tổng các giá trị trên 2 điểm màu đỏ kề nó nên tổng giá trị trên các điểm màu xanh bằng $\frac{1}{2}$ tổng giá trị trên các điểm màu đỏ.

$$\text{Tổng tất cả các số } a_i \text{ là : } 506 + \frac{1}{2} \cdot 506 = 759$$